Relaciones

Matemática Discreta

UNCPBA

Cursada 2017

Relaciones

Con el término **relación** nos referimos, en principio, a la idea intuitiva de **emparejamiento**. Luego formalizaremos esta idea.
Digamos por ahora tan sólo que, entre dos entidades a y b se establece un criterio que permite afirmar que cumplen una relación R entre ellos, lo cual se denota aRb, y bien que no la cumplen, y lo denotamos $a \not R\, b$.

Relaciones

Con el término **relación** nos referimos, en principio, a la idea intuitiva de **emparejamiento**. Luego formalizaremos esta idea.
Digamos por ahora tan sólo que, entre dos entidades a y b se establece un criterio que permite afirmar que cumplen una relación R entre ellos, lo cual se denota aRb, y bien que no la cumplen, y lo denotamos $a \not R\, b$.

Cuando hablamos informalmente de una relación R, la expresión aRb da una afirmación, que es **verdadera** o **falsa**. Para que la relación R tenga sentido, debe delimitarse a un **Universo de discurso** adecuado.

Relaciones

Con el término **relación** nos referimos, en principio, a la idea intuitiva de **emparejamiento**. Luego formalizaremos esta idea.
Digamos por ahora tan sólo que, entre dos entidades a y b se establece un criterio que permite afirmar que cumplen una relación R entre ellos, lo cual se denota aRb, y bien que no la cumplen, y lo denotamos $a \not R\, b$.

Cuando hablamos informalmente de una relación R, la expresión aRb da una afirmación, que es **verdadera** o **falsa**. Para que la relación R tenga sentido, debe delimitarse a un **Universo de discurso** adecuado.

Relación de igualdad: El ejemplo más básico y claro de relación es el que establece que dos entidades son iguales, o no. Si a y b son exactamente la misma cosa, decimos que a **es igual a** b, y escribimos $a = b$.

Ejemplos de relaciones

1. **R: es padre de:** Dadas dos personas a y b, o bien a es padre de b o bien no lo es. En caso de que lo sea, escribimos aRb, y si no, escribimos $a \not R\, b$.

Ejemplos de relaciones

1. **R: es padre de:** Dadas dos personas a y b, o bien a es padre de b o bien no lo es. En caso de que lo sea, escribimos aRb, y si no, escribimos $a \not R\, b$.
2. **R: es elemento de:** Dados dos conjuntos A y B, o bien A pertenece, como elemento, a B, o bien no lo hace. En caso de que sí pertenezca, escribimos: ARB.
   Naturalmente, aquí R es la relación $\in$.

Ejemplos de relaciones

1. **R: es padre de:** Dadas dos personas a y b, o bien a es padre de b o bien no lo es. En caso de que lo sea, escribimos aRb, y si no, escribimos $a \not R\, b$.
2. **R: es elemento de:** Dados dos conjuntos A y B, o bien A pertenece, como elemento, a B, o bien no lo hace. En caso de que sí pertenezca, escribimos: ARB.
   Naturalmente, aquí R es la relación $\in$.
3. **R: limita con:** Dados dos países a y b, o bien a limita con b, o bien no lo hace. En caso de que sí limita, escribimos: aRb.

Ejemplos de relaciones

1. **R: es padre de:** Dadas dos personas a y b, o bien a es padre de b o bien no lo es. En caso de que lo sea, escribimos aRb, y si no, escribimos $a \not R\, b$.
2. **R: es elemento de:** Dados dos conjuntos A y B, o bien A pertenece, como elemento, a B, o bien no lo hace. En caso de que sí pertenezca, escribimos: ARB.
   Naturalmente, aquí R es la relación $\in$.
3. **R: limita con:** Dados dos países a y b, o bien a limita con b, o bien no lo hace. En caso de que sí limita, escribimos: aRb.
4. **R: tiene más espinas que:** Dados dos peces a y b, o bien a tiene más espinas que b, o bien no tiene. En caso de que sí tenga, escribimos aRb.

Ejemplos de relaciones

1. **R: es padre de:** Dadas dos personas a y b, o bien a es padre de b o bien no lo es. En caso de que lo sea, escribimos aRb, y si no, escribimos $a \not R\, b$.
2. **R: es elemento de:** Dados dos conjuntos A y B, o bien A pertenece, como elemento, a B, o bien no lo hace. En caso de que sí pertenezca, escribimos: ARB.
   Naturalmente, aquí R es la relación $\in$.
3. **R: limita con:** Dados dos países a y b, o bien a limita con b, o bien no lo hace. En caso de que sí limita, escribimos: aRb.
4. **R: tiene más espinas que:** Dados dos peces a y b, o bien a tiene más espinas que b, o bien no tiene. En caso de que sí tenga, escribimos aRb.
5. **R: es más objetivo que:** Dados dos políticos a y b, decidimos establecer una escala de valores en la cual juzgamos que a es más objetivo que b, o no lo es. En caso afirmativo, anotamos aRb.

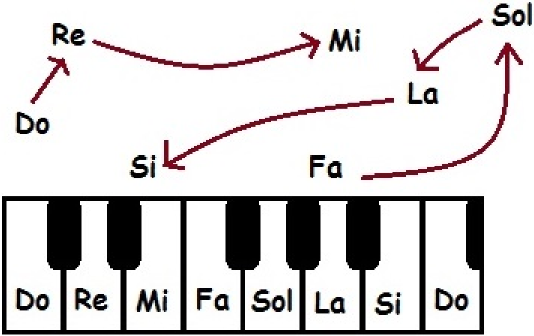
Diagramas de grafos dirigidos

Para universos de pocos objetos, es posible representar una relación R con un **Grafo Dirigido**, uniendo con una flecha cada objeto con aquellos con los que está R-relacionado.

Diagramas de grafos dirigidos

Para universos de pocos objetos, es posible representar una relación R con un **Grafo Dirigido**, uniendo con una flecha cada objeto con aquellos con los que está R-relacionado.

Ejemplo: en el universo de notas musicales, damos la relación R dada por aRb si en el piano hay una sola tecla negra de a hasta b.



Relaciones como conjuntos

Demos una noción más precisa del concepto de relación, a través de conjuntos.

Relaciones como conjuntos

Demos una noción más precisa del concepto de relación, a través de conjuntos.

Dado un conjunto A, una **relación R en A** es un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times A$. Por lo tanto:

$$R \subset A \times A.$$

Relaciones como conjuntos

Demos una noción más precisa del concepto de relación, a través de conjuntos.

Dado un conjunto A, una **relación R en A** es un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times A$. Por lo tanto:

$$R \subset A \times A.$$

Más generalmente, dados dos conjuntos A y B, una **relación con dominio A y codominio B**, es cualquier subconjunto R de $A \times B$.

Relaciones como conjuntos

Demos una noción más precisa del concepto de relación, a través de conjuntos.

Dado un conjunto A, una **relación R en A** es un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times A$. Por lo tanto:

$$R \subset A \times A.$$

Más generalmente, dados dos conjuntos A y B, una **relación con dominio A y codominio B**, es cualquier subconjunto R de $A \times B$.

Si a está R-relacionado con b, decimos que aRb es verdadera, y escribimos $(a, b) \in R$.

Relaciones como conjuntos

Demos una noción más precisa del concepto de relación, a través de conjuntos.

Dado un conjunto A, una **relación R en A** es un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times A$. Por lo tanto:

$$R \subset A \times A.$$

Más generalmente, dados dos conjuntos A y B, una **relación con dominio A y codominio B**, es cualquier subconjunto R de $A \times B$.

Si a está R-relacionado con b, decimos que aRb es verdadera, y escribimos $(a, b) \in R$.

En general nos interesará el caso en que A y B son iguales.

Ejemplos de relaciones

1. $A = \{\text{Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si}\}$,
   aRb: hay sólo una nota negra desde a hasta b.

$$R = \{(\text{Do,Re}), (\text{Re,Mi}), (\text{Fa,Sol}), (\text{Sol,La}), (\text{La,Si})\}.$$

Ejemplos de relaciones

1. $A = \{\text{Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si}\}$,
   aRb: hay sólo una nota negra desde a hasta b.
   $$R = \{(\text{Do,Re}),\ (\text{Re,Mi}),\ (\text{Fa,Sol}),\ (\text{Sol,La}),\ (\text{La,Si})\}.$$
2. $A = \{\text{A,B,AB,O}\}$,
   xRy: el grupo sanguíneo x puede donar sangre del mismo factor Rh al grupo sanguíneo y.
   $$\begin{aligned} R = \{&(\text{A,A}),(\text{A,AB}),(\text{B,B}),(\text{B,AB}),(\text{AB,AB}),\\ &(\text{O,O}),(\text{O,A}),(\text{O,B}),(\text{O,AB})\}. \end{aligned}$$

Ejemplos de relaciones

1. $A = \{\text{Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si}\}$,
   aRb: hay sólo una nota negra desde a hasta b.

   $$R = \{(\text{Do,Re}), (\text{Re,Mi}), (\text{Fa,Sol}), (\text{Sol,La}), (\text{La,Si})\}.$$

2. $A = \{\text{A,B,AB,O}\}$,
   xRy: el grupo sanguíneo x puede donar sangre del mismo factor Rh al grupo sanguíneo y.

   $$R = \{(\text{A,A}),(\text{A,AB}),(\text{B,B}),(\text{B,AB}),(\text{AB,AB}),\\ (\text{O,O}),(\text{O,A}),(\text{O,B}),(\text{O,AB})\}.$$

3. En el conjunto A de las especies de animales, aRb significa: individuos de la especie a son capaces de comerse individuos de la especie b. Si $(a, a) \in R$, quiere decir que la especie a es caníbal.

Más ejemplos

1. En el conjunto de funciones $A = \{f, g, h, u\}$ definidas debajo, definimos aRb como la relación: **la imagen de a es subconjunto del dominio de b.**

$$
\begin{aligned}
f : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, +\infty), &\qquad f(x) = \arctan(x);\\
g : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty) &\qquad g(x) = \ln x;\\
h : (-1, 1) \to (-1, 1), &\qquad h(x) = 1_{\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}}(x);\\
u : (-\infty, +\infty) \to [-1, 1], &\qquad u(x) = \cos(x).
\end{aligned}
$$

$$R = \{(f, u), (g, u), (h, f), (h, h), (h, u), (u, f), (u, u)\}.$$

Más ejemplos

1. En el conjunto de funciones $A = \{f, g, h, u\}$ definidas debajo, definimos aRb como la relación: **la imagen de a es subconjunto del dominio de b.**

$$\begin{aligned} f : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, +\infty), &\qquad f(x) = \arctan(x); \\ g : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty) &\qquad g(x) = \ln x; \\ h : (-1, 1) \to (-1, 1), &\qquad h(x) = 1_{\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}}(x); \\ u : (-\infty, +\infty) \to [-1, 1], &\qquad u(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

$$R = \{(f, u), (g, u), (h, f), (h, h), (h, u), (u, f), (u, u)\}.$$

2. Sea $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, definimos aRb si a es divisor exacto de b, y además a y b son distintos. Luego:

$$R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6)\}.$$

Relaciones triviales

En un conjunto A cualquiera, el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de $A \times A$. Se considera una relación R en A, y satisface que aRb es falsa para todo $a, b \in A$.

Relaciones triviales

En un conjunto A cualquiera, el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de $A \times A$. Se considera una relación R en A, y satisface que aRb es falsa para todo $a, b \in A$.

En un conjunto A cualquiera, el conjunto $A \times A$ contiene todos los pares posibles $(a, b) \in A \times A$. Se considera también una relación R en A, y satisface que aRb es verdadera para todos los elementos $a, b \in A$.

Relaciones triviales

En un conjunto A cualquiera, el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de $A \times A$. Se considera una relación R en A, y satisface que aRb es falsa para todo $a, b \in A$.

En un conjunto A cualquiera, el conjunto $A \times A$ contiene todos los pares posibles $(a, b) \in A \times A$. Se considera también una relación R en A, y satisface que aRb es verdadera para todos los elementos $a, b \in A$.

Las relaciones $\emptyset$ y $A \times A$ se llaman **relaciones triviales** en A.

Relaciones inversas

Dada una relación R en un conjunto A, se define su relación inversa R^{-1} mediante:

$$aR^{-1}b \iff bRa.$$

Relaciones inversas

Dada una relación R en un conjunto A, se define su relación inversa R^{-1} mediante:

$$aR^{-1}b \iff bRa.$$

1. $X = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aRb: a puede donar sangre a b.
   $aR^{-1}b$: a puede recibir sangre de b.

Relaciones inversas

Dada una relación R en un conjunto A, se define su relación inversa R^{-1} mediante:

$$aR^{-1}b \Longleftrightarrow bRa.$$

1. $X = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aRb: a puede donar sangre a b.
   $aR^{-1}b$: a puede recibir sangre de b.
2. $A = \{\text{números reales}\}$.
   aRb: a es menor o igual que b.
   $aR^{-1}b$: a es mayor o igual que b.

Relaciones inversas

Dada una relación R en un conjunto A, se define su relación inversa R^{-1} mediante:

$$aR^{-1}b \Longleftrightarrow bRa.$$

1. $X = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aRb: a puede donar sangre a b.
   $aR^{-1}b$: a puede recibir sangre de b.
2. $A = \{\text{números reales}\}$.
   aRb: a es menor o igual que b.
   $aR^{-1}b$: a es mayor o igual que b.
3. $A = \{\text{usuarios de Facebook}\}$
   aRb: a puso "Me gusta" en una publicación de b.
   $aR^{-1}b$: en una publicación, a recibió un "Me gusta" de b.

Relaciones funcionales

Dados dos conjuntos A, B, y un subconjunto $R \subset A \times B$, decimos que R es una **relación funcional** si R describe la gráfica de una función, es decir, si:

- A cada elemento $a \in A$ corresponde al menos un elemento $b \in B$ tal que aRb.

Relaciones funcionales

Dados dos conjuntos A, B, y un subconjunto $R \subset A \times B$, decimos que R es una **relación funcional** si R describe la gráfica de una función, es decir, si:

- A cada elemento $a \in A$ corresponde al menos un elemento $b \in B$ tal que aRb.
- Si a un elemento $a \in A$ corresponden elementos $b, \tilde{b} \in B$, entonces $b = \tilde{b}$.

Relaciones funcionales

Dados dos conjuntos A, B, y un subconjunto $R \subset A \times B$, decimos que R es una **relación funcional** si R describe la gráfica de una función, es decir, si:

- A cada elemento $a \in A$ corresponde al menos un elemento $b \in B$ tal que aRb.
- Si a un elemento $a \in A$ corresponden elementos $b, \tilde{b} \in B$, entonces $b = \tilde{b}$.

Relaciones funcionales

Dados dos conjuntos A, B, y un subconjunto $R \subset A \times B$, decimos que R es una **relación funcional** si R describe la gráfica de una función, es decir, si:

- A cada elemento $a \in A$ corresponde al menos un elemento $b \in B$ tal que aRb.
- Si a un elemento $a \in A$ corresponden elementos $b, \tilde{b} \in B$, entonces $b = \tilde{b}$.

En este caso, podemos decir que R en realidad es (o determina) una función $f : A \to B$, cuya regla es $f(a) = b$ si y sólo si aRb.

Ejemplos de relaciones funcionales

Graficar las siguientes relaciones en el plano, e indicar si ellas o sus inversas son relaciones funcionales, o no, o si hay algún subconjunto de A ó de B en donde la relación o su inversa es funcional.

1. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplos de relaciones funcionales

Graficar las siguientes relaciones en el plano, e indicar si ellas o sus inversas son relaciones funcionales, o no, o si hay algún subconjunto de A ó de B en donde la relación o su inversa es funcional.

1. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x^2 + y^2 = r^2$.
2. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x - (y - 1)^2 = 4$.

Ejemplos de relaciones funcionales

Graficar las siguientes relaciones en el plano, e indicar si ellas o sus inversas son relaciones funcionales, o no, o si hay algún subconjunto de A ó de B en donde la relación o su inversa es funcional.

1. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x^2 + y^2 = r^2$.
2. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x - (y-1)^2 = 4$.
3. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $\cos y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Ejemplos de relaciones funcionales

Graficar las siguientes relaciones en el plano, e indicar si ellas o sus inversas son relaciones funcionales, o no, o si hay algún subconjunto de A ó de B en donde la relación o su inversa es funcional.

1. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x^2 + y^2 = r^2$.
2. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $x - (y-1)^2 = 4$.
3. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $\cos y = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $A = B = \mathbb{R}$, xRy: $xy = 1$.

Relaciones reflexivas

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **reflexiva** si todo elemento está relaciondo consigo mismo.

Relaciones reflexivas

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **reflexiva** si todo elemento está relaciondo consigo mismo.

¿Cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aR_1b: el grupo a puede donar al grupo b.
2. $A = \{\text{números enteros positivos}\}$,
   aR_2b: el número a divide exactamente al número b.
3. $A = \{\text{humanos de toda la historia}\}$,
   aR_3b: el humano a es padre o madre del humano b.
4. $A = \{\text{intervalos abiertos de } \mathbb{R} \text{ centrados en } 0\}$,
   IR_4J: el intervalo I está contenido en la mitad del intervalo J.

Relaciones simétricas

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **simétrica** si cada vez que un elemento a está R-relacionado con b, también b está R-relacionado con a.
En símbolos:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R.$$

Escrito de otro modo equivalente:

$$\forall a, b \in A : aRb \Longrightarrow bRa.$$

Ejemplos de relaciones simétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son simétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{Juan, Pedro, Ana, Julia}\}$,
   aR_1b: a es primo de b.

Ejemplos de relaciones simétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son simétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{Juan, Pedro, Ana, Julia}\}$,
   aR_1b: a es primo de b.
2. $A = \{\text{países del mundo}\}$,
   aR_2b: a tiene frontera con b.

Ejemplos de relaciones simétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son simétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{Juan, Pedro, Ana, Julia}\}$,
   aR_1b: a es primo de b.
2. $A = \{\text{países del mundo}\}$,
   aR_2b: a tiene frontera con b.
3. $A = \{\text{personas del mundo}\}$,
   aR_3b: a es más alto que b,

Ejemplos de relaciones simétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son simétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{Juan, Pedro, Ana, Julia}\}$,
   aR_1b: a es primo de b.
2. $A = \{\text{países del mundo}\}$,
   aR_2b: a tiene frontera con b.
3. $A = \{\text{personas del mundo}\}$,
   aR_3b: a es más alto que b,
4. $A = \{2, 4, 8, 6, 12\}$,
   aR_4b: a tiene los mismos divisores que b.

Ejemplos de relaciones simétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son simétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{Juan, Pedro, Ana, Julia}\}$,
   aR_1b: a es primo de b.
2. $A = \{\text{países del mundo}\}$,
   aR_2b: a tiene frontera con b.
3. $A = \{\text{personas del mundo}\}$,
   aR_3b: a es más alto que b,
4. $A = \{2, 4, 8, 6, 12\}$,
   aR_4b: a tiene los mismos divisores que b.
5. $A = \{\text{amor,mora,aroma,ramos,asomar}\}$
   pR_5q: p contiene las mismas letras del alfabeto que contiene q.

Relaciones transitivas

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **transitiva** si, cada vez que a está R-relacionado con b, y b está R-relacionado con c, también se tiene que a está R-relacionado con c.

Relaciones transitivas

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **transitiva** si, cada vez que a está R-relacionado con b, y b está R-relacionado con c, también se tiene que a está R-relacionado con c.
En símbolos:

$$\forall a, b, c \in A : [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R].$$

Alternativamente escribimos:

$$\forall a, b, c \in A : [aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc].$$

Ejemplos de relaciones transitivas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son transitivas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{individuos de la especie humana}\}$,
   aR_1b: a es ancestro de b.

Ejemplos de relaciones transitivas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son transitivas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{individuos de la especie humana}\}$,
   aR_1b: a es ancestro de b.
2. $A = \{\text{frutas}\}$,
   aR_2b: Kim Jong-un opina que a es más deliciosa que b.

Ejemplos de relaciones transitivas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son transitivas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{individuos de la especie humana}\}$,
   aR_1b: a es ancestro de b.
2. $A = \{\text{frutas}\}$,
   aR_2b: Kim Jong-un opina que a es más deliciosa que b.
3. $A = \{\text{seres humanos}\}$,
   aR_3b: a es tío de b.

Ejemplos de relaciones transitivas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son transitivas y cuáles no lo son?

1. $A = \{\text{individuos de la especie humana}\}$,
   aR_1b: a es ancestro de b.
2. $A = \{\text{frutas}\}$,
   aR_2b: Kim Jong-un opina que a es más deliciosa que b.
3. $A = \{\text{seres humanos}\}$,
   aR_3b: a es tío de b.
4. $A = \{\text{agua,sangre,aceite,petróleo}\}$,
   aR_4b: la sustancia a es más densa que la sustancia b.

Relaciones antisimétricas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **antisimétrica** si la única manera de que ocurra al mismo tiempo que a esté R-relacionado con b y que b esté R-relacionado con a, es sólo cuando a y b son el mismo elemento.

Relaciones antisimétricas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice **antisimétrica** si la única manera de que ocurra al mismo tiempo que a esté R-relacionado con b y que b esté R-relacionado con a, es sólo cuando a y b son el mismo elemento.

En símbolos:

$$\forall a, b \in A : [(a, b) \in R \wedge (b, a) \Longrightarrow a = b].$$

O bien:

$$\forall a, b \in A : [aRb \wedge bRa \Longrightarrow a = b].$$

Ejemplos de relaciones antisimétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{+, -\}$,
   aRb: el signo a multiplicado por el signo b da positivo.

Ejemplos de relaciones antisimétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{+, -\}$,
   aRb: el signo a multiplicado por el signo b da positivo.
2. $A = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aRb: el grupo sanguíneo a puede donar al grupo sanguíneo b.

Ejemplos de relaciones antisimétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{+, -\}$,
   aRb: el signo a multiplicado por el signo b da positivo.
2. $A = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aRb: el grupo sanguíneo a puede donar al grupo sanguíneo b.
3. $A = \{\text{números enteros}\}$,
   aRb: el número a es divisor exacto del número b.

Ejemplos de relaciones antisimétricas

¿Cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas y cuáles no lo son?

1. $A = \{+, -\}$,
   aRb: el signo a multiplicado por el signo b da positivo.
2. $A = \{\text{grupos sanguíneos}\}$,
   aRb: el grupo sanguíneo a puede donar al grupo sanguíneo b.
3. $A = \{\text{números enteros}\}$,
   aRb: el número a es divisor exacto del número b.
4. $A = \{\text{palabras del diccionario}\}$,
   aRb: la palabra a no viene antes que la palabra b en el diccionario.

La antisimetría sin nombrar igualdad

Proposición

Dado un conjunto A y una relación R en A, se tiene que R es una relación antisimétrica si, y sólo si, dados cualesquiera $a, b \in A$, tales que $a \neq b$, si aRb entonces tenemos la negación de lo contrario, es decir, se tiene que $b \not R a$.

Demostración

En efecto, sea R antisimétrica, y sean $a, b \in A$, tales que $a \neq b$ y tal que aRb. Entonces $a \not R b$, porque si bRa, entonces tendríamos, por antisimetría que $a = b$, en contra del supuesto que $a \neq b$, absurdo.
Por otra parte, supongamos que R es una relación que cumple:

$$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \Longrightarrow b \not R a.$$

Supongamos que $\alpha, \beta \in A$, y tal que $\alpha R \beta$ y que $\beta R \alpha$. Si $\alpha \neq \beta$, se deduciría que $\beta \not R \alpha$, que es una contradicción. Por lo tanto $\alpha = \beta$.

Relaciones irreflexivas y no reflexivas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se llama **irreflexiva** si ningún elemento de A está R-relacionado consigo mismo. En símbolos:

$$\forall a \in A : a \not{R}\, a.$$

Relaciones irreflexivas y no reflexivas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se llama **irreflexiva** si ningún elemento de A está R-relacionado consigo mismo. En símbolos:

$$\forall a \in A : a \not R \ a.$$

Ejercicios.

1. Demostrar que la relación vacía es irreflexiva.

Relaciones irreflexivas y no reflexivas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se llama **irreflexiva** si ningún elemento de A está R-relacionado consigo mismo. En símbolos:

$$\forall a \in A : a \not R\, a.$$

Ejercicios.

1. Demostrar que la relación vacía es irreflexiva.
2. En el conjunto A de todos los humanos, la relación aRb, a es padre de b, es irreflexiva.

Relaciones irreflexivas y no reflexivas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se llama **irreflexiva** si ningún elemento de A está R-relacionado consigo mismo. En símbolos:

$$\forall a \in A : a \not R\, a.$$

Ejercicios.

1. Demostrar que la relación vacía es irreflexiva.
2. En el conjunto A de todos los humanos, la relación aRb, a es padre de b, es irreflexiva.
3. Demostrar que toda relación irreflexiva es no reflexiva.

Relaciones irreflexivas y no reflexivas

Definición

En un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se llama **irreflexiva** si ningún elemento de A está R-relacionado consigo mismo. En símbolos:

$$\forall a \in A : a \not R\, a.$$

Ejercicios.

1. Demostrar que la relación vacía es irreflexiva.
2. En el conjunto A de todos los humanos, la relación aRb, a es padre de b, es irreflexiva.
3. Demostrar que toda relación irreflexiva es no reflexiva.
4. Mostrar un ejemplo de una relación que es no reflexiva, pero que no es irreflexiva.

Relaciones de orden parcial

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice una **relación de orden parcial** si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Relaciones de orden parcial

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice una **relación de orden parcial** si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Se dice que R es una **relación de orden parcial estricto** si es **irreflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Relaciones de orden parcial

Definición

Dado un conjunto A, una relación $R \subset A \times A$ se dice una **relación de orden parcial** si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Se dice que R es una **relación de orden parcial estricto** si es **irreflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Los símbolos que suelen usarse para denotar órdenes parciales son: $\preceq$, $\leq$, $\succeq$, $\geq$, entre otros similares.

Para órdenes parciales estrictos, se suelen usar los símbolos: $\prec$, $<$, $\succ$, $>$, entre otros similares.

Diagrama de Hasse

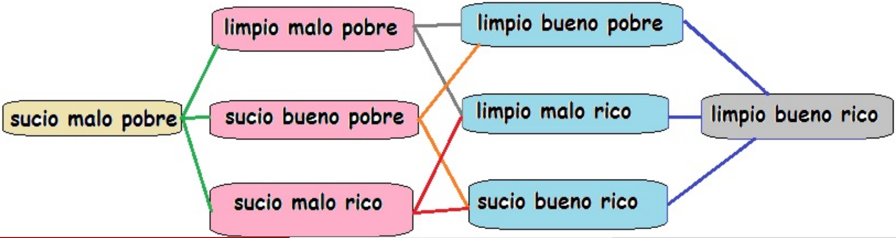
Dado un conjunto A **finito** con un orden parcial no estricto $\preceq$ (o sea que vale la ley reflexiva), se puede representar dicho orden mediante un esquema llamado **diagrama de Hasse**, en que los elementos de A se representan con puntos etiquetados, y una flecha desde a hasta b indicando que $a \preceq b$, y que no hay otros elementos **entre** a y c.

La reflexividad y la transitividad se dan por asumidas.

Diagrama de Hasse

Dado un conjunto A **finito** con un orden parcial no estricto $\preceq$ (o sea que vale la ley reflexiva), se puede representar dicho orden mediante un esquema llamado **diagrama de Hasse**, en que los elementos de A se representan con puntos etiquetados, y una flecha desde a hasta b indicando que $a \preceq b$, y que no hay otros elementos **entre** a y c.
La reflexividad y la transitividad se dan por asumidas.

Como ejemplo, pongamos una lista de cualidades en los pretendientes de una señora, ordenados desde lo menos deseable a lo más deseable:



Ejemplos de órdenes parciales no estrictos:

1. En cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, tenemos definida la relación de orden $a \leq b$, que *grosso modo* podemos establecer como:
   $a \leq b$ si la representación en la recta numérica del punto a está a izquierda de b o bien ambos son iguales.

Ejemplos de órdenes parciales no estrictos:

1. En cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, tenemos definida la relación de orden $a \leq b$, que *grosso modo* podemos establecer como:
   $a \leq b$ si la representación en la recta numérica del punto a está a izquierda de b o bien ambos son iguales.
2. En $\mathbb{N}$ podemos definir la relación de orden $a|b$, mediante la propiedad: a es divisor exacto de b, o equivalentemente:
   $$\exists k \in \mathbb{N} : ak = b.$$
   Está claro que todo número es divisor exacto de sí mismo, así que la relación $|$ es reflexiva, y por lo tanto es un orden no estricto.

Elementos comparables y tricotomía

Elementos comparables

Dado un conjunto A con un orden parcial $R \subset A \times A$, que puede ser estricto o no, se dice que dos elementos $a, b \in A$ son **comparables** (respecto R) si $a = b$, o aRb o bRa.

Elementos comparables y tricotomía

Elementos comparables

Dado un conjunto A con un orden parcial $R \subset A \times A$, que puede ser estricto o no, se dice que dos elementos $a, b \in A$ son **comparables** (respecto R) si $a = b$, o aRb o bRa.

En el ejemplo de los pretendientes, *sucio-bueno-pobre* y *sucio-bueno-rico* son comparables, pero *limpio-malo-pobre* y *sucio-bueno-rico* no son comparables.

Elementos comparables y tricotomía

Elementos comparables

Dado un conjunto A con un orden parcial $R \subset A \times A$, que puede ser estricto o no, se dice que dos elementos $a, b \in A$ son **comparables** (respecto R) si $a = b$, o aRb o bRa.

En el ejemplo de los pretendientes, *sucio-bueno-pobre* y *sucio-bueno-rico* son comparables, pero *limpio-malo-pobre* y *sucio-bueno-rico* no son comparables.

Tricotomía

Dado un conjunto A con un orden parcial R, que puede ser estricto o no, se dice que R cumple la **propiedad de tricotomía**, si cualesquiera $a, b \in A$ son comparables (respecto R). En símbolos:

$$\forall a, b \in A : [a = b \vee aRb \vee bRa].$$

Orden total

Sea A un conjunto con un orden parcial R en A, que puede ser estricto o no. Decimos que R es un **orden total** si satisface la **propiedad de tricotomía** (es decir, que todo par de elementos es comparable).

Orden total

Sea A un conjunto con un orden parcial R en A, que puede ser estricto o no. Decimos que R es un **orden total** si satisface la **propiedad de tricotomía** (es decir, que todo par de elementos es comparable).

Si R inicialmente era un orden parcial no estricto, entonces se dice que R es un **orden total no estricto**.

Si R inicialmente era un orden parcial estricto, entonces se dice que R es un **orden total estricto**.

Orden total

Sea A un conjunto con un orden parcial R en A, que puede ser estricto o no. Decimos que R es un **orden total** si satisface la **propiedad de tricotomía** (es decir, que todo par de elementos es comparable).

Si R inicialmente era un orden parcial no estricto, entonces se dice que R es un **orden total no estricto**.

Si R inicialmente era un orden parcial estricto, entonces se dice que R es un **orden total estricto**.

Ejemplo: Las palabras de un diccionario con el orden alfabético.

Orden total

Sea A un conjunto con un orden parcial R en A, que puede ser estricto o no. Decimos que R es un **orden total** si satisface la **propiedad de tricotomía** (es decir, que todo par de elementos es comparable).

Si R inicialmente era un orden parcial no estricto, entonces se dice que R es un **orden total no estricto**.

Si R inicialmente era un orden parcial estricto, entonces se dice que R es un **orden total estricto**.

Ejemplo: Las palabras de un diccionario con el orden alfabético.

Representación gráfica: En general, un orden total se puede representar con puntos en una recta, de izquierda a derecha, o de abajo hacia arriba.

Ejemplos de órdenes totales

1. Cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, con la relación $a \leq b$, indicada *grosso modo* así:
   $a \leq b$ si en la recta numérica al número a le corresponde un punto a izquierda de b, o bien a ambos corresponde el mismo punto.

Ejemplos de órdenes totales

1. Cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, con la relación $a \leq b$, indicada *grosso modo* así:
   $a \leq b$ si en la recta numérica al número a le corresponde un punto a izquierda de b, o bien a ambos corresponde el mismo punto.
2. Dado un alfabeto X de caracteres codificados con números enteros, ordenemos las palabras del lenguaje X^* (de todas las sucesiones ordenadas finitas de caracteres de X) según el orden alfabético inducido por X. (Denotar por ejemplo $\prec$ a este orden).

Ejemplos de órdenes totales

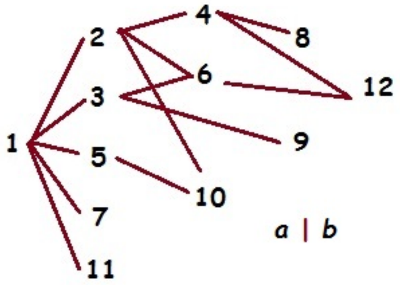
1. Cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, con la relación $a \leq b$, indicada *grosso modo* así:
   $a \leq b$ si en la recta numérica al número a le corresponde un punto a izquierda de b, o bien a ambos corresponde el mismo punto.
2. Dado un alfabeto X de caracteres codificados con números enteros, ordenemos las palabras del lenguaje X^* (de todas las sucesiones ordenadas finitas de caracteres de X) según el orden alfabético inducido por X. (Denotar por ejemplo $\prec$ a este orden).
3. El conjunto A de planetas del Sistema Solar, ordenados según su distancia al Sol.

Ejemplos de órdenes totales

1. Cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, con la relación $a \leq b$, indicada *grosso modo* así:
   $a \leq b$ si en la recta numérica al número a le corresponde un punto a izquierda de b, o bien a ambos corresponde el mismo punto.
2. Dado un alfabeto X de caracteres codificados con números enteros, ordenemos las palabras del lenguaje X^* (de todas las sucesiones ordenadas finitas de caracteres de X) según el orden alfabético inducido por X. (Denotar por ejemplo $\prec$ a este orden).
3. El conjunto A de planetas del Sistema Solar, ordenados según su distancia al Sol.
4. En el conjunto A de las personas con teléfono fijo de una nación, consideramos dos órdenes posibles:
   $p \leq_1 q$ si p precede a q según el orden dado por apellido y nombre,
   $p \leq_2 q$ si el número telefónico de p antecede al de q según el orden natural de los dígitos.

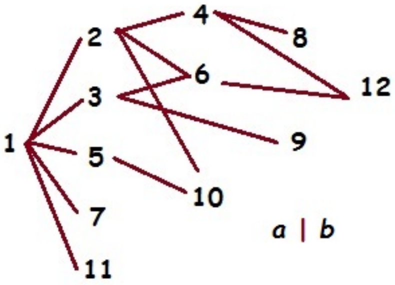
Ejemplos de órdenes parciales no totales

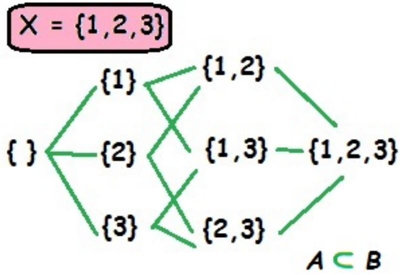
1. En el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales, definimos el orden $a|b$, y leemos *a* **es divisor de** *b*, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = ak$.



Ejemplos de órdenes parciales no totales

1. En el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales, definimos el orden $a|b$, y leemos *a* **es divisor de** *b*, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = ak$.





2. Dado un conjunto X, consideremos en el conjunto de conjuntos $\mathcal{P}(X)$ el orden determinado por la relación de inclusión: $A \subset B$.

Órdenes vinculados

Supongamos que tenemos una relación de orden $\leq$ (parcial o total) en un conjunto A.
A partir de ella podemos crear una **relación de orden estricto asociada**, que en este caso denotaremos $<$, y que es la versión irreflexiva de $\leq$, vale decir:

$$a < b \qquad \text{significa} \qquad a \leq b \wedge a \neq b.$$

Órdenes vinculados

Supongamos que tenemos una relación de orden $\leq$ (parcial o total) en un conjunto A.

A partir de ella podemos crear una **relación de orden estricto asociada**, que en este caso denotaremos $<$, y que es la versión irreflexiva de $\leq$, vale decir:

$$a < b \qquad \text{significa} \qquad a \leq b \wedge a \neq b.$$

Recíprocamente, dada una relación de orden estricta $<$ en un conjunto A, podemos crear una **relación de orden asociada** (no estricta), que denotaremos $\leq$, y que es la versión reflexiva de $<$, vale decir:

$$a \leq b \qquad \text{significa:} \qquad [a < b \vee a = b].$$

Relaciones de orden inversas

La relación inversa de una relación de orden no estricto $\leq$ se denota $\geq$, y se puede probar fácilmente que también es una relación de orden no estricto.

Relaciones de orden inversas

La relación inversa de una relación de orden no estricto $\leq$ se denota $\geq$, y se puede probar fácilmente que también es una relación de orden no estricto.

La relación inversa de una relación de orden estricto $<$ se denota $>$, y se puede probar fácilmente que también es una relación de orden estricto.

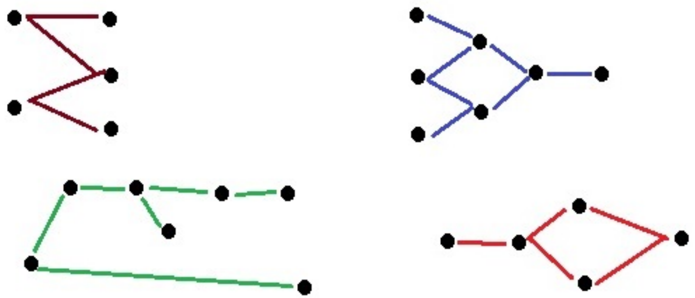
Máximos y mínimos

Sea A un conjunto con una relación de orden $\leq$.
Un elemento $x \in A$ se llama **máximo** en A, si: $\forall a \in A : a \leq x$.
Un elemento $x \in A$ se llama **mínimo** en A, si: $\forall a \in A : x \leq a$.

Máximos y mínimos

Sea A un conjunto con una relación de orden $\leq$.
Un elemento $x \in A$ se llama **máximo** en A, si: $\forall a \in A : a \leq x$.
Un elemento $x \in A$ se llama **mínimo** en A, si: $\forall a \in A : x \leq a$.

No todo conjunto ordenado tiene máximo o mínimo. ¿Cuál de los siguientes conjuntos ordenados tiene máximo, mínimo, ambos o ninguno?



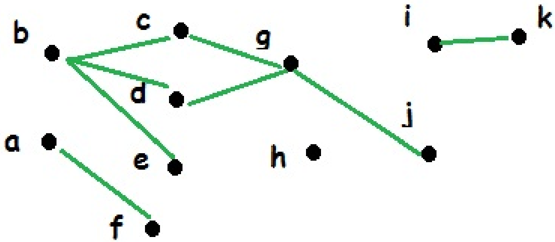
Elementos maximales y minimales

Sea A un conjunto con un orden no estricto $\leq$.
Un elemento $x \in A$ se dice **maximal** en A si no existen en A elementos estrictamente mayores que x, es decir: $\forall a \in A : [x \leq a \Longrightarrow a = x]$.
Un elemento $x \in A$ se dice **minimal** en A si no existen en A elementos estrictamente menores que x, es decir: $\forall a \in A : [a \leq x \Longrightarrow a = x]$.

Elementos maximales y minimales

Sea A un conjunto con un orden no estricto $\leq$.
Un elemento $x \in A$ se dice **maximal** en A si no existen en A elementos estrictamente mayores que x, es decir: $\forall a \in A : [x \leq a \Longrightarrow a = x]$.
Un elemento $x \in A$ se dice **minimal** en A si no existen en A elementos estrictamente menores que x, es decir: $\forall a \in A : [a \leq x \Longrightarrow a = x]$.

¿Cuáles son elementos maximales y minimales en el siguiente ejemplo?



Diferencias entre lo máximo y lo maximal

Teorema. En un conjunto A con una relación de orden total $\leq$, un elemento x es minimal si y sólo si x es el mínimo de A, y un elemento x es maximal si y sólo si x es el máximo de A.

Diferencias entre lo máximo y lo maximal

Teorema. En un conjunto A con una relación de orden total $\leq$, un elemento x es minimal si y sólo si x es el mínimo de A, y un elemento x es maximal si y sólo si x es el máximo de A.

Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con los órdenes no estrictos $\leq$ (menor o igual que) y $|$ (es divisor de).

- Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo respecto la relación $\leq$.

Diferencias entre lo máximo y lo maximal

Teorema. En un conjunto A con una relación de orden total $\leq$, un elemento x es minimal si y sólo si x es el mínimo de A, y un elemento x es maximal si y sólo si x es el máximo de A.

Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con los órdenes no estrictos $\leq$ (menor o igual que) y $|$ (es divisor de).

- Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo respecto la relación $\leq$.
- ¿Puede ocurrir que haya subconjuntos de $\mathbb{N}$ en los que no haya un elemento mínimo respecto la relación $|$?
  Ejemplo: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 16, 24\}$.

Diferencias entre lo máximo y lo maximal

Teorema. En un conjunto A con una relación de orden total $\leq$, un elemento x es minimal si y sólo si x es el mínimo de A, y un elemento x es maximal si y sólo si x es el máximo de A.

Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con los órdenes no estrictos $\leq$ (menor o igual que) y $|$ (es divisor de).

- Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo respecto la relación $\leq$.
- ¿Puede ocurrir que haya subconjuntos de $\mathbb{N}$ en los que no haya un elemento mínimo respecto la relación $|$?
  Ejemplo: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 16, 24\}$.
- Aunque A no tiene elemento mínimo, los elementos $2, 3, 5$, son minimales de A respecto la relación $|$.

Cotas superior e inferior

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$.
Sea $B \subset A$ un subconjunto no vacío de A.
Decimos que un elemento x de A es una cota superior de B, si todo elemento de B es menor o igual que x:

$$\forall b \in B : b \leq x.$$

Decimos que un elemento x de A es una cota inferior de B, si x es menor o igual que todo elemento de B:

$$\forall b \in B : x \leq b.$$

Cotas superior e inferior

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$.
Sea $B \subset A$ un subconjunto no vacío de A.
Decimos que un elemento x de A es una cota superior de B, si todo elemento de B es menor o igual que x:

$$\forall b \in B : b \leq x.$$

Decimos que un elemento x de A es una cota inferior de B, si x es menor o igual que todo elemento de B:

$$\forall b \in B : x \leq b.$$

No necesariamente un conjunto tiene cota superior o cota inferior.

Cotas superior e inferior

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$.
Sea $B \subset A$ un subconjunto no vacío de A.
Decimos que un elemento x de A es una cota superior de B, si todo elemento de B es menor o igual que x:

$$\forall b \in B : b \leq x.$$

Decimos que un elemento x de A es una cota inferior de B, si x es menor o igual que todo elemento de B:

$$\forall b \in B : x \leq b.$$

No necesariamente un conjunto tiene cota superior o cota inferior.
* Si x es una cota superior de B, y si $x \leq \tilde{x}$,
entonces obviamente también $\tilde{x}$ es una cota superior de B.
* Si x es una cota inferior de B, y si $\tilde{x} \leq x$,
entonces obviamente también $\tilde{x}$ es una cota inferior de B.

Supremos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.

Supremos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.

Un elemento b del conjunto A es un **supremo** de B si:

- b es una **cota superior** de B,
- y b es mínima entre todas las cotas superiores de B.

Supremos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.

Un elemento b del conjunto A es un **supremo** de B si:

- b es una **cota superior** de B,
- y b es mínima entre todas las cotas superiores de B.

Como a lo sumo hay un único mínimo en un conjunto, esta **minima cota superior** es única, y **cuando existe** la denotamos:

$$\sup(B) = \min\{b \in A : b \text{ cota superior de } B\}.$$

Supremos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.

Un elemento b del conjunto A es un **supremo** de B si:

- b es una **cota superior** de B,
- y b es mínima entre todas las cotas superiores de B.

Como a lo sumo hay un único mínimo en un conjunto, esta **minima cota superior** es única, y **cuando existe** la denotamos:

$$\sup(B) = \min\{b \in A : b \text{ cota superior de } B\}.$$

- Puede haber conjuntos acotados sin supremo.

Supremos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.

Un elemento b del conjunto A es un **supremo** de B si:

- b es una **cota superior** de B,
- y b es mínima entre todas las cotas superiores de B.

Como a lo sumo hay un único mínimo en un conjunto, esta **minima cota superior** es única, y **cuando existe** la denotamos:

$$\sup(B) = \min\{b \in A : b \text{ cota superior de } B\}.$$

- Puede haber conjuntos acotados sin supremo.
- Si existe el supremo, es único, porque es el mínimo de un conjunto de cotas superiores, y a lo sumo hay un mínimo en un conjunto dado.

Ínfimos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.

Ínfimos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.
Un elemento c del conjunto A es un **ínfimo** de B si:

- c es una **cota inferior** de B,
- y c es máxima entre todas las cotas inferiores de B.

Ínfimos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.
Un elemento c del conjunto A es un **ínfimo** de B si:

- c es una **cota inferior** de B,
- y c es máxima entre todas las cotas inferiores de B.

Como a lo sumo hay un único máximo en un conjunto, esta **máxima cota superior** es única, y **cuando existe** la denotamos:

$$\inf(B) = \max\{b \in A : b \text{ cota inferior de } B\}.$$

- Puede haber conjuntos acotados sin ínfimo.

Ínfimos

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$, cuyo orden estricto asociado denotamos $<$, y sea $B \subset A$ un subconjunto de A.
Un elemento c del conjunto A es un **ínfimo** de B si:

- c es una **cota inferior** de B,
- y c es máxima entre todas las cotas inferiores de B.

Como a lo sumo hay un único máximo en un conjunto, esta **máxima cota superior** es única, y **cuando existe** la denotamos:

$$\inf(B) = \max\{b \in A : b \text{ cota inferior de } B\}.$$

- Puede haber conjuntos acotados sin ínfimo.
- Si existe el ínfimo, es único, porque es el máximo de un conjunto de cotas inferiores, y a lo sumo hay un máximo en un conjunto dado.

Ejemplos de supremos e ínfimos

Consideremos en $\mathbb{R}$ el orden usual $\leq$ de la recta de los números reales.

- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.

Ejemplos de supremos e ínfimos

Consideremos en $\mathbb{R}$ el orden usual $\leq$ de la recta de los números reales.

- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.
- En el conjunto $\mathbb{N}$ todo conjunto no vacío A que tiene alguna cota superior $b \in \mathbb{R}$, tiene máximo, coincide con el supremo de A.

Ejemplos de supremos e ínfimos

Consideremos en $\mathbb{R}$ el orden usual $\leq$ de la recta de los números reales.

- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.
- En el conjunto $\mathbb{N}$ todo conjunto no vacío A que tiene alguna cota superior $b \in \mathbb{R}$, tiene máximo, coincide con el supremo de A.
- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{Z}$ que tiene alguna cota inferior $c \in \mathbb{R}$, tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.

Ejemplos de supremos e ínfimos

Consideremos en $\mathbb{R}$ el orden usual $\leq$ de la recta de los números reales.

- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.
- En el conjunto $\mathbb{N}$ todo conjunto no vacío A que tiene alguna cota superior $b \in \mathbb{R}$, tiene máximo, coincide con el supremo de A.
- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{Z}$ que tiene alguna cota inferior $c \in \mathbb{R}$, tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.
- En el conjunto $\mathbb{Z}$ todo conjunto no vacío A que tiene alguna cota superior $b \in \mathbb{N}$, tiene máximo, que coincide con el supremo de A.

Ejemplos de supremos e ínfimos

Consideremos en $\mathbb{R}$ el orden usual $\leq$ de la recta de los números reales.

- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.
- En el conjunto $\mathbb{N}$ todo conjunto no vacío A que tiene alguna cota superior $b \in \mathbb{R}$, tiene máximo, coincide con el supremo de A.
- Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{Z}$ que tiene alguna cota inferior $c \in \mathbb{R}$, tiene un elemento mínimo, que además es ínfimo de A.
- En el conjunto $\mathbb{Z}$ todo conjunto no vacío A que tiene alguna cota superior $b \in \mathbb{N}$, tiene máximo, que coincide con el supremo de A.
- En el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, siempre hay un salto entre un entero n y su siguiente $n+1$. (Esto significa que no hay elementos de $\mathbb{Z}$ entre n y $n+1$).

  En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no hay saltos entre dos números dados a, b, pues siempre $c = (a+b)/2$ satisface que $a < c < b$.

Más sobre supremos e ínfimos

- En el conjunto $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{\frac{p}{3} : p \in \mathbb{Z}\}$ no tiene mínimo, máximo, supremos ni ínfimos.

Más sobre supremos e ínfimos

- En el conjunto $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{\frac{p}{3} : p \in \mathbb{Z}\}$ no tiene mínimo, máximo, supremos ni ínfimos.
- En $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{1 + \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ no tiene mínimo, pero tiene ínfimo igual a 1, y tiene a 2 como máximo y supremo.

Más sobre supremos e ínfimos

- En el conjunto $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{\frac{p}{3} : p \in \mathbb{Z}\}$ no tiene mínimo, máximo, supremos ni ínfimos.
- En $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{1 + \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ no tiene mínimo, pero tiene ínfimo igual a 1, y tiene a 2 como máximo y supremo.
- En $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ está acotado inferiormente por $c = -\sqrt{2}$ y superiormente por $b = +\sqrt{2}$.
  Los números b y c están en $\mathbb{R}$ pero no están en $\mathbb{Q}$.
  El conjunto A no tiene mínimo ni máximo.
  Tampoco tiene ínfimo ni supremo en $\mathbb{Q}$.
  Sin embargo, A tiene supremo $(\sqrt{2})$ e ínfimo $(-\sqrt{2})$ en $\mathbb{R}$.

Más sobre supremos e ínfimos

- En el conjunto $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{\frac{p}{3} : p \in \mathbb{Z}\}$ no tiene mínimo, máximo, supremos ni ínfimos.
- En $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{1 + \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ no tiene mínimo, pero tiene ínfimo igual a 1, y tiene a 2 como máximo y supremo.
- En $\mathbb{Q}$, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ está acotado inferiormente por $c = -\sqrt{2}$ y superiormente por $b = +\sqrt{2}$.
  Los números b y c están en $\mathbb{R}$ pero no están en $\mathbb{Q}$.
  El conjunto A no tiene mínimo ni máximo.
  Tampoco tiene ínfimo ni supremo en $\mathbb{Q}$.
  Sin embargo, A tiene supremo ($\sqrt{2}$) e ínfimo ($-\sqrt{2}$) en $\mathbb{R}$.
- **Axioma del supremo y el ínfimo en $\mathbb{R}$.**
  Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ que tiene al menos una cota superior b, tiene supremo $\beta = \sup(A)$ en $\mathbb{R}$.
  Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ que tiene al menos una cota inferior c, tiene ínfimo $\gamma = \inf(A)$ en $\mathbb{R}$.

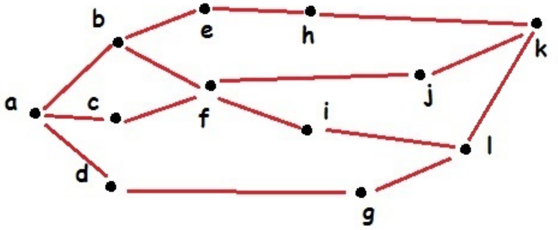
Reticulados

Definición

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$.
Supongamos que se cumple la condición de que, para todo par de elementos $a, b \in A$, siempre existen $\sup\{a.b\}$ y $\inf\{a, b\}$. Denotamos:

$$a \uparrow b = \sup\{a, b\} \qquad a \downarrow b = \inf\{a, b\}.$$

En tales condiciones decimos que $(A, \leq)$ forma un **reticulado**.



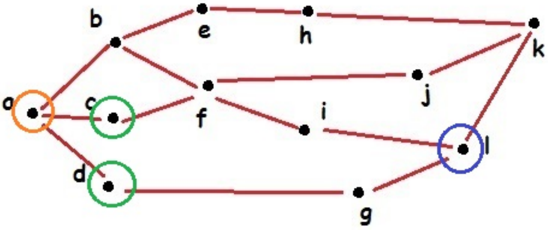
Reticulados

Definición

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$. Supongamos que se cumple la condición de que, para todo par de elementos $a, b \in A$, siempre existen $\sup\{a.b\}$ y $\inf\{a, b\}$. Denotamos:

$$a \uparrow b = \sup\{a, b\} \qquad a \downarrow b = \inf\{a, b\}.$$

En tales condiciones decimos que $(A, \leq)$ forma un **reticulado**.



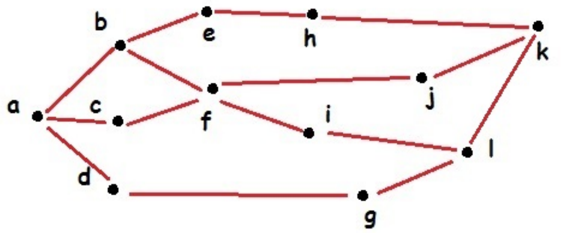
Reticulados

Definición

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$.
Supongamos que se cumple la condición de que, para todo par de elementos $a, b \in A$, siempre existen $\sup\{a.b\}$ y $\inf\{a, b\}$. Denotamos:

$$a \uparrow b = \sup\{a, b\} \qquad a \downarrow b = \inf\{a, b\}.$$

En tales condiciones decimos que $(A, \leq)$ forma un **reticulado**.



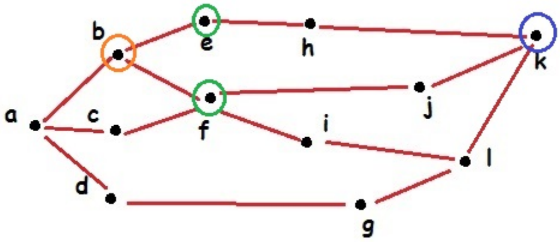
Reticulados

Definición

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$. Supongamos que se cumple la condición de que, para todo par de elementos $a, b \in A$, siempre existen $\sup\{a.b\}$ y $\inf\{a, b\}$. Denotamos:

$$a \uparrow b = \sup\{a, b\} \qquad a \downarrow b = \inf\{a, b\}.$$

En tales condiciones decimos que $(A, \leq)$ forma un **reticulado**.



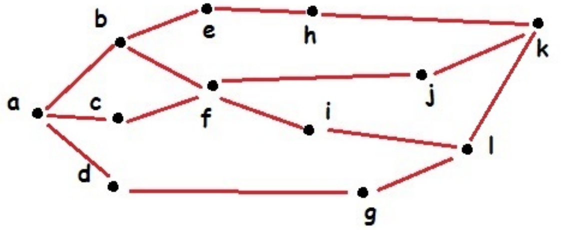
Reticulados

Definición

Sea A un conjunto con una relación de orden no estricto $\leq$. Supongamos que se cumple la condición de que, para todo par de elementos $a, b \in A$, siempre existen $\sup\{a.b\}$ y $\inf\{a, b\}$. Denotamos:

$$a \uparrow b = \sup\{a, b\} \qquad a \downarrow b = \inf\{a, b\}.$$

En tales condiciones decimos que $(A, \leq)$ forma un **reticulado**.



Ejemplos de reticulado

1. Sea X un conjunto cualquiera, y sea $\mathcal{P}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X, con la relación $\subset$ considerada como relación de orden en $\mathcal{P}(X)$. Entonces es un reticulado, pues existen el supremo y el ínfimo de dos elementos $P, Q \in \mathcal{P}(X)$, así:

$$\sup\{P, Q\} = P \cup Q \qquad \inf\{P \cap Q\} = P \cap Q.$$

Ejemplos de reticulado

1. Sea X un conjunto cualquiera, y sea $\mathcal{P}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X, con la relación $\subset$ considerada como relación de orden en $\mathcal{P}(X)$. Entonces es un reticulado, pues existen el supremo y el ínfimo de dos elementos $P, Q \in \mathcal{P}(X)$, así:

$$\sup\{P, Q\} = P \cup Q \qquad \inf\{P \cap Q\} = P \cap Q.$$

2. En el conjunto $\mathbb{N}$, con la relación $\mid$ (es divisor de), tenemos un reticulado, pues dados dos números naturales m, n, existen:
   - El máximo número c que divide a m y n, se llama **máximo común divisor** de m y n, y se denota $\mathrm{mcd}(m, n)$
   - El mínimo número b divisible por m y por n, se llama **mínimo común múltiplo** de m y n, y se denota $\mathrm{mcm}(m, n)$

$$m \uparrow n = \mathrm{mcm}(m, n) \qquad m \downarrow n = \mathrm{mcd}(m, n).$$

Ejemplos de reticulado

1. Sea X un conjunto cualquiera, y sea $\mathcal{P}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X, con la relación $\subset$ considerada como relación de orden en $\mathcal{P}(X)$. Entonces es un reticulado, pues existen el supremo y el ínfimo de dos elementos $P, Q \in \mathcal{P}(X)$, así:
$$\sup\{P, Q\} = P \cup Q \qquad \inf\{P \cap Q\} = P \cap Q.$$
2. En el conjunto $\mathbb{N}$, con la relación $\mid$ (es divisor de), tenemos un reticulado, pues dados dos números naturales m, n, existen:
   - El máximo número c que divide a m y n, se llama **máximo común divisor** de m y n, y se denota $\mathrm{mcd}(m, n)$
   - El mínimo número b divisible por m y por n, se llama **mínimo común múltiplo** de m y n, y se denota $\mathrm{mcm}(m, n)$
$$m \uparrow n = \mathrm{mcm}(m, n) \qquad m \downarrow n = \mathrm{mcd}(m, n).$$
3. Si A es un conjunto con un orden total $\leq$, entonces es reticulado:
$$x \uparrow y = \max(x, y) \qquad x \downarrow y = \min(x, y).$$

Relaciones de equivalencia

Definición

Dado un conjunto A y una relación R en A, decimos que R es una **relación de equivalencia**, si R es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.

Relaciones de equivalencia

Definición

Dado un conjunto A y una relación R en A, decimos que R es una **relación de equivalencia**, si R es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.

La noción de **relación de equivalencia** generaliza las propiedades de la **relación de igualdad**, y se utiliza para dictaminar como **equivalentes** a objetos que tienen cierta propiedad en común.

Relaciones de equivalencia

Definición

Dado un conjunto A y una relación R en A, decimos que R es una **relación de equivalencia**, si R es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.

La noción de **relación de equivalencia** generaliza las propiedades de la **relación de igualdad**, y se utiliza para dictaminar como **equivalentes** a objetos que tienen cierta propiedad en común.

Definición

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto A, es posible particionar el conjunto A en **clases de equivalencia**, que son subconjuntos disjuntos con elementos $\sim$-equivalentes.
Si $c \in A$, la **la clase de equivalencia asociada a c** se denota:

$$[c] = \{x \in A : x \sim c\}.$$

Ejemplos de relaciones y clases de equivalencia

1. Dado un conjunto cualquiera A, la igualdad $=$ entre objetos de A es una relación de equivalencia:

$$\forall a, b, c \in A : \begin{cases} a = a, \\ a = b \Longrightarrow b = a, \\ a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = c. \end{cases}$$

Cada **clase de equivalencia** tiene un solo elemento:

$$[c] = \{c\}, \qquad \text{todo } c \in A.$$

Ejemplos de relaciones y clases de equivalencia

1. Dado un conjunto cualquiera A, la igualdad $=$ entre objetos de A es una relación de equivalencia:

$$\forall a, b, c \in A : \begin{cases} a = a, \\ a = b \Longrightarrow b = a, \\ a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = c. \end{cases}$$

   Cada **clase de equivalencia** tiene un solo elemento:

$$[c] = \{c\}, \qquad \text{todo } c \in A.$$

2. Dado el conjunto X de los seres humanos, definimos la relación de equivalencia $p \sim q$ si la persona p tiene el mismo grupo sanguíneo y factor Rh que la persona q.
   En total, habrá 8 clases de equivalencia, que se denotan:
   $A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-.$

Más ejemplos de relaciones de equivalencia

1. Dado el conjunto A de circunferencias en el plano $\mathbb{R}^2$, decimos que dos circunferencias C_1 y C_2 son equivalentes, y lo denotamos $C_1 \sim C_2$, si existe un movimiento de traslación del plano que lleva C_1 sobre C_2 de manera que queden superpuestas.
   En este ejemplo, la relación $\sim$ es de equivalencia (**por qué**), y se puede expresar formalmente como:
   $$C_1 \sim C_2 \Longleftrightarrow [\exists v \in \mathbb{R}^2 : (\{(x, y) + v : (x, y) \in C_1\} = C_2)].$$
   Cada clase de equivalencia contiene a las circunferencias de un mismo radio r. **¿Por qué?**

Más ejemplos de relaciones de equivalencia

1. Dado el conjunto A de circunferencias en el plano $\mathbb{R}^2$, decimos que dos circunferencias C_1 y C_2 son equivalentes, y lo denotamos $C_1 \sim C_2$, si existe un movimiento de traslación del plano que lleva C_1 sobre C_2 de manera que queden superpuestas.
   En este ejemplo, la relación $\sim$ es de equivalencia (**por qué**), y se puede expresar formalmente como:
   $$C_1 \sim C_2 \Longleftrightarrow [\exists v \in \mathbb{R}^2 : (\{(x,y)+v : (x,y) \in C_1\} = C_2)].$$
   Cada clase de equivalencia contiene a las circunferencias de un mismo radio r. **¿Por qué?**
2. En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, definimos la relación $z \sim w$ entre dos números complejos, diciendo que z y w son equivalentes si $|z| = |w|$, o sea, si tienen el mismo radio.
   Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia, y que las clases de equivalencia son $\{0\}$ y las circunferencias centradas en 0.

Ejemplos topológicos de relaciones de equivalencia

1. Tomemos una hoja de papel cuadrada, de manera que en ella se representamos los puntos del **cuadrado** $A = [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejemplos topológicos de relaciones de equivalencia

1. Tomemos una hoja de papel cuadrada, de manera que en ella se representamos los puntos del **cuadrado** $A = [0,1] \times [0,1]$.
2. Definimos una relación de equivalencia en el cuadrado, tal que los puntos de igual coordenada x, que están en los bordes, o sea $y = 0$ e $y = 1$, sean equivalentes:

$$(x,0) \sim (x,1), \qquad \forall x \in [0,1].$$

   y tal que si $0 < y < 1$, entonces (x,y) es equivalente sólo a sí mismo.

   Al pegar aquellos puntos que son equivalentes, la hoja la podemos doblar para formar, por ejemplo, un **cilindro**.

Ejemplos topológicos de relaciones de equivalencia

1. Tomemos una hoja de papel cuadrada, de manera que en ella se representamos los puntos del **cuadrado** $A = [0,1] \times [0,1]$.
2. Definimos una relación de equivalencia en el cuadrado, tal que los puntos de igual coordenada x, que están en los bordes, o sea $y = 0$ e $y = 1$, sean equivalentes:

   $$(x, 0) \sim (x, 1), \qquad \forall x \in [0,1].$$

   y tal que si $0 < y < 1$, entonces (x, y) es equivalente sólo a sí mismo.
   Al pegar aquellos puntos que son equivalentes, la hoja la podemos doblar para formar, por ejemplo, un **cilindro**.
3. Si ahora, además, identificamos con una relación de equivalencia también a los puntos $(0, y)$ y $(1, y)$, con $y \in [0,1]$, y pegamos los puntos equivalentes, podremos curvar el cilindro de modo que se forme, por ejemplo, una **dona**.

Teorema de las clases de equivalencia

Teorema (de las clases de equivalencia)

Sea A un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$.
Sea $[a]$ la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$. Entonces:

1. Todo elemento pertenece a su propia clase de equivalencia:

$$\forall a \in A : a \in [a].$$

Teorema de las clases de equivalencia

Teorema (de las clases de equivalencia)

Sea A un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$.
Sea $[a]$ la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$. Entonces:

1. Todo elemento pertenece a su propia clase de equivalencia:
$$\forall a \in A : a \in [a].$$
2. Dos clases de equivalencia asociadas a elementos a y b son iguales, si y sólo si, los representantes a y b son equivalentes entre sí:
$$\forall a, b \in A : [a] = [b] \iff a \sim b.$$

Teorema de las clases de equivalencia

Teorema (de las clases de equivalencia)

Sea A un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$.
Sea $[a]$ la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$. Entonces:

1. Todo elemento pertenece a su propia clase de equivalencia:
$$\forall a \in A : a \in [a].$$
2. Dos clases de equivalencia asociadas a elementos a y b son iguales, si y sólo si, los representantes a y b son equivalentes entre sí:
$$\forall a, b \in A : [a] = [b] \iff a \sim b.$$
3. Dos clases de equivalencia, si no son la misma, entonces son completamente disjuntas:
$$\forall a, b \in A : [a] \neq [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset.$$

Teorema de las particiones

Teorema

Sea A un conjunto no vacío, y sea $\mathcal{C}$ una **partición** de A, es decir, una familia de subconjuntos de A que son todos disjuntos, que tienen al menos un elemento cada uno, y cuya unión es todo A.
Enntonces hay una relación de equivalencia $\sim$ cuyas clases de equivalencia son los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{C}$.

Dejamos como ejercicio completar la demostración.
Es fácil tras definir correctamente la relación de equivalencia $\sim$, así:
Sean $a, b \in A$. Como $\mathcal{C}$ es una partición de A, existen conjuntos $P, Q \in \mathcal{C}$ tales que $a \in P$ y $b \in Q$.
Si a y b están en el mismo elemento P de la partición, definimos $a \sim b$.
Tras probar que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, se debe comprobar que las clases de equivalencia $[a]$ para cada $a \in A$, son exactamente los elementos de la partición $\mathcal{C}$.

Conjunto cociente y representantes

Dado un conjunto A con una relación de equivalencia $\sim$, el conjunto de las clases de equivalencia de $\sim$ en A es un conjunto de subconjuntos disjuntos de A, que se llama **conjunto cociente de A sobre $\sim$**, y se denotará $A/\sim$.

$$A/\sim = \{[a] : a \in A\}.$$

Conjunto cociente y representantes

Dado un conjunto A con una relación de equivalencia $\sim$, el conjunto de las clases de equivalencia de $\sim$ en A es un conjunto de subconjuntos disjuntos de A, que se llama **conjunto cociente de A sobre $\sim$**, y se denotará $A/\sim$.

$$A/\sim = \{[a] : a \in A\}.$$

Cada elemento de una clase de equivalencia se llama un **representante** de dicha clase.

Conjunto cociente y representantes

Dado un conjunto A con una relación de equivalencia $\sim$, el conjunto de las clases de equivalencia de $\sim$ en A es un conjunto de subconjuntos disjuntos de A, que se llama **conjunto cociente de A sobre $\sim$**, y se denotará $A/\sim$.

$$A/\sim = \{[a] : a \in A\}.$$

Cada elemento de una clase de equivalencia se llama un **representante** de dicha clase.

La función que a cada elemento de A le asigna su clase de equivalencia se le llama **función cociente**:

$$\phi : A \to (A/\sim), \qquad \phi(a) = [a].$$

Conjunto cociente y representantes

Dado un conjunto A con una relación de equivalencia $\sim$, el conjunto de las clases de equivalencia de $\sim$ en A es un conjunto de subconjuntos disjuntos de A, que se llama **conjunto cociente de A sobre $\sim$**, y se denotará $A/\sim$.

$$A/\sim = \{[a] : a \in A\}.$$

Cada elemento de una clase de equivalencia se llama un **representante** de dicha clase.

La función que a cada elemento de A le asigna su clase de equivalencia se le llama **función cociente**:

$$\phi : A \to (A/\sim), \qquad \phi(a) = [a].$$

Un conjunto $\mathcal{R}$ de **representantes** de la relación de equivalencia $\sim$ es un subconjunto de A que contiene un y solo un elemento de cada clase de equivalencia, que se considera el representante de esa clase.

Clases de congruencia en los números enteros

Definición

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y para cada número entero positivo m, definimos la **relación de congruencia módulo** m, $a \equiv b \pmod{m}$, mediante la propiedad:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m | (b - a).$$

Clases de congruencia en los números enteros

Definición

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y para cada número entero positivo m, definimos la **relación de congruencia módulo** m, $a \equiv b \pmod{m}$, mediante la propiedad:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m|(b-a).$$

Esto quiere decir que a y b son congruentes módulo m
si el resto al dividir a por m es igual al resto de dividir b por m.

Clases de congruencia en los números enteros

Definición

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y para cada número entero positivo m, definimos la **relación de congruencia módulo** m, $a \equiv b \pmod{m}$, mediante la propiedad:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m|(b-a).$$

Esto quiere decir que a y b son congruentes módulo m
si el resto al dividir a por m es igual al resto de dividir b por m.
Otra notación posible, pero que no usaremos, sería: $a \equiv_m b$.

Clases de congruencia en los números enteros

Definición

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y para cada número entero positivo m, definimos la **relación de congruencia módulo** m, $a \equiv b \pmod{m}$, mediante la propiedad:

$$a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow m | (b - a).$$

Esto quiere decir que a y b son congruentes módulo m
si el resto al dividir a por m es igual al resto de dividir b por m.
Otra notación posible, pero que no usaremos, sería: $a \equiv_m b$.

Teorema

Para cada $m = 1, 2, 3, \ldots$, la congruencia módulo m es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.
La demostración queda como ejercicio.

Clases de congruencia módulo m y representantes

1. Con $m = 1$, todos los enteros son congruentes módulo 1, así que hay una sola clase de equivalencia, que es todo $\mathbb{Z}$.

Clases de congruencia módulo m y representantes

1. Con $m = 1$, todos los enteros son congruentes módulo 1, así que hay una sola clase de equivalencia, que es todo $\mathbb{Z}$.
2. Con $m > 1$, hay exactamente m clases de congruencia distintas. Podemos tomar como representantes a los números $\mathcal{R} = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$.

Clases de congruencia módulo m y representantes

1. Con $m = 1$, todos los enteros son congruentes módulo 1, así que hay una sola clase de equivalencia, que es todo $\mathbb{Z}$.
2. Con $m > 1$, hay exactamente m clases de congruencia distintas. Podemos tomar como representantes a los números $\mathcal{R} = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$.
3. Si a dos números enteros congruentes módulo m, le sumamos otro número entero, los resultados correspondientes son también congruentes módulo m.
   Si a dos números enteros congruentes módulo m, le multiplicamos otro número entero, los resultados correspondientes son también congruentes módulo m.
   Entonces, la suma y la multiplicación se conservan por relaciones de congruencia con un mismo módulo m.