Funciones

Matemática Discreta

UNCPBA

Cursada 2017

Funciones

Con el término **función** nos referimos, en principio, a la idea intuitiva de **correspondencia unívoca**. Luego formalizaremos esta idea.

Funciones

Con el término **función** nos referimos, en principio, a la idea intuitiva de **correspondencia unívoca**. Luego formalizaremos esta idea.

En muchos contextos necesitamos expresar que a cada elemento x de un conjunto X, corresponde otro elemento y, que depende de x.

$$x \longrightarrow y.$$

Funciones

Con el término **función** nos referimos, en principio, a la idea intuitiva de **correspondencia unívoca**. Luego formalizaremos esta idea.

En muchos contextos necesitamos expresar que a cada elemento x de un conjunto X, corresponde otro elemento y, que depende de x.

$$x \longrightarrow y.$$

A cada elemento x de X siempre le corresponde algún elemento y, y dicho elemento y es el único que le corresponde.
Dicho de otro modo, si a x le hacemos corresponder dos elementos y, y', entonces $y = y'$:

$$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow y \\ \\ x \longrightarrow y' \end{array}\right| \Longrightarrow y = y'.$$

Definición formal de función

Formalmente, una **función** se determina por 3 elementos:

1. Un conjunto X, que llamaremos **dominio** de la función;

Definición formal de función

Formalmente, una **función** se determina por 3 elementos:

1. Un conjunto X, que llamaremos **dominio** de la función;
2. un conjunto Y, que llamaremos **codominio** de la función;

Definición formal de función

Formalmente, una **función** se determina por 3 elementos:

1. Un conjunto X, que llamaremos **dominio** de la función;
2. un conjunto Y, que llamaremos **codominio** de la función;
3. un conjunto f, que llamaremos **relación funcional** o **regla de asignación**, que cumple lo siguiente:

Definición formal de función

Formalmente, una **función** se determina por 3 elementos:

1. Un conjunto X, que llamaremos **dominio** de la función;
2. un conjunto Y, que llamaremos **codominio** de la función;
3. un conjunto f, que llamaremos **relación funcional** o **regla de asignación**, que cumple lo siguiente:
   - f es un subconjunto de $X \times Y$:

$$(x, y) \in f \Longrightarrow (x \in X \wedge y \in Y).$$

Definición formal de función

Formalmente, una **función** se determina por 3 elementos:

1. Un conjunto X, que llamaremos **dominio** de la función;
2. un conjunto Y, que llamaremos **codominio** de la función;
3. un conjunto f, que llamaremos **relación funcional** o **regla de asignación**, que cumple lo siguiente:
   - f es un subconjunto de $X \times Y$:
   $$(x, y) \in f \Longrightarrow (x \in X \wedge y \in Y).$$
   - A cada elemento x del dominio, le corresponde por f algún elemento y del codominio:
   $$\forall x \in X : (\exists y \in Y : [(x, y) \in f]).$$

Definición formal de función

Formalmente, una **función** se determina por 3 elementos:

1. Un conjunto X, que llamaremos **dominio** de la función;
2. un conjunto Y, que llamaremos **codominio** de la función;
3. un conjunto f, que llamaremos **relación funcional** o **regla de asignación**, que cumple lo siguiente:
   - f es un subconjunto de $X \times Y$:
     $$(x, y) \in f \Longrightarrow (x \in X \wedge y \in Y).$$
   - A cada elemento x del dominio, le corresponde por f algún elemento y del codominio:
     $$\forall x \in X : (\exists y \in Y : [(x, y) \in f]).$$
   - **Unicidad de la imagen.** A cada elemento x del dominio le corresponde por f a lo sumo un único elemento y del codominio:
     $$\forall x \in X : [(x, y), (x, y') \in f \Longrightarrow y = y'].$$

Notación

Si (X, Y, f) es una terna que determina una función con dominio X, codominio Y y regla de asignación f, vamos a denotar de aquí en más:

$$f : X \to Y.$$

Notación

Si (X, Y, f) es una terna que determina una función con dominio X, codominio Y y regla de asignación f, vamos a denotar de aquí en más:

$$f : X \to Y.$$

Para denotar que al elemento x de X le corresponde por f el elemento y de Y, también escribimos:

$$y = f(x), \qquad x \in X.$$

Notación

Si (X, Y, f) es una terna que determina una función con dominio X, codominio Y y regla de asignación f, vamos a denotar de aquí en más:

$$f : X \to Y.$$

Para denotar que al elemento x de X le corresponde por f el elemento y de Y, también escribimos:

$$y = f(x), \qquad x \in X.$$

Otra forma de denotar la función será:

$$f : X \to Y; \qquad x \longrightarrow f(x).$$

En la práctica nos referiremos a f como **la** función, pero siempre tenemos que tener en mente que hay un dominio X y un codominio Y.

Ejemplos

- Sean $X = \{$hombre,araña,cabra,ciempiés$\}$,
  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 100\}$,
  $f = \{(\text{hombre}, 2), (\text{araña}, 8), (\text{cabra}, 4), (\text{ciempiés}, 100)\}$.

Ejemplos

- Sean $X = \{\text{hombre,araña,cabra,ciempiés}\}$,
  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 100\}$,
  $f = \{(\text{hombre}, 2), (\text{araña}, 8), (\text{cabra}, 4), (\text{ciempiés}, 100)\}$.
  Aquí la función tiene dominio X, codominio Y, y regla de asignación f, que puede resumirse como:

  $f(x)$ es el número de patas de x.

- Sean $X = \{\text{Venus, Tierra, Marte, Urano, Neptuno}\}$,
  $Y = \{\text{verdoso, azulado, rojizo, violáceo}\}$,
  f regla de asignación dada mediante:

  el planeta x tiene el color $f(x)$.

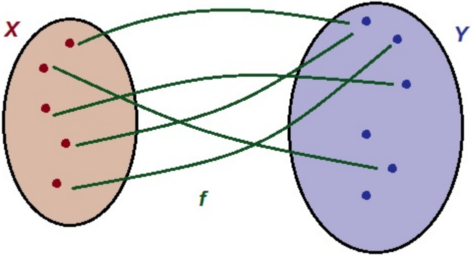
Ejemplos

- Sean $X = \{\text{hombre,araña,cabra,ciempiés}\}$,
  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 100\}$,
  $f = \{(\text{hombre}, 2), (\text{araña}, 8), (\text{cabra}, 4), (\text{ciempiés}, 100)\}$.
  Aquí la función tiene dominio X, codominio Y, y regla de asignación f, que puede resumirse como:
  $f(x)$ es el número de patas de x.
- Sean $X = \{\text{Venus, Tierra, Marte, Urano, Neptuno}\}$,
  $Y = \{\text{verdoso, azulado, rojizo, violáceo}\}$,
  f regla de asignación dada mediante:
  el planeta x tiene el color $f(x)$.

  Esto da la regla:
  $f = \{(\text{Venus,verdoso}),(\text{Tierra,azulado}),(\text{Marte,rojizo}), (\text{Urano,azulado}),(\text{Neptuno,verdoso})\}$.

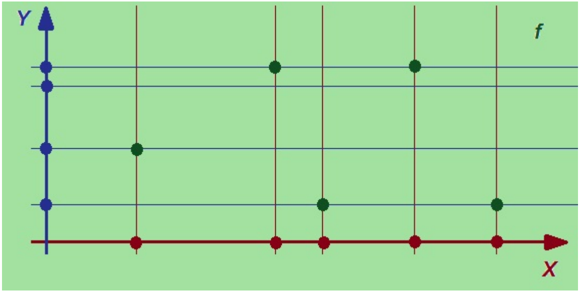
Diversas representaciones de funciones

Diagramas de Venn:

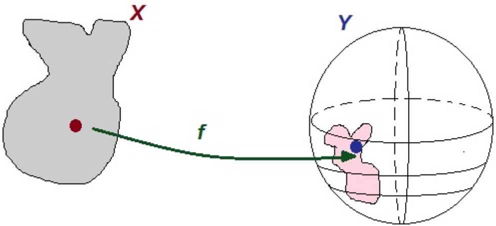


Diversas representaciones de funciones

Ejes cartesianos:

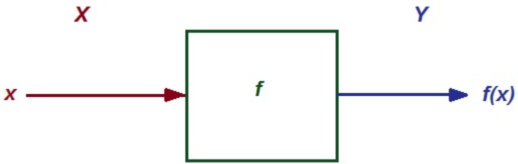


Diversas representaciones de funciones



Mapas:

Diversas representaciones de funciones



Operación:

Diversas representaciones de funciones

Tabla:

x	$f(x)$
a	α
b	β
$\vdots$	$\vdots$
r	ρ

Diversas representaciones de funciones

Notación de emparejamiento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & c & d & e & r \end{pmatrix}$$

Terminología

Dada una función $f : A \to B$:

- Se denotan al **dominio** y al **codominio** de f como: $A = \mathrm{Dom}(f)$ y $B = \mathrm{Codom}(f)$, respectivamente.

Terminología

Dada una función $f : A \to B$:

- Se denotan al **dominio** y al **codominio** de f como: $A = \mathrm{Dom}(f)$ y $B = \mathrm{Codom}(f)$, respectivamente.
- Si x es un elemento del dominio de f, se llama **imagen** de x por f al elemento $y = f(x)$ (que está en el codominio). También se dice que x es una **preimagen** de y por f.

Terminología

Dada una función $f : A \to B$:

- Se denotan al **dominio** y al **codominio** de f como: $A = \mathrm{Dom}(f)$ y $B = \mathrm{Codom}(f)$, respectivamente.
- Si x es un elemento del dominio de f, se llama **imagen** de x por f al elemento $y = f(x)$ (que está en el codominio).
  También se dice que x es una **preimagen** de y por f.
- Si $S \subset A$, la **imagen** de S por f es el conjunto de las imágenes de todos los elementos $x \in S$:

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\} = \{y \in B : \exists x \in S(y = f(x))\}.$$

Terminología

Dada una función $f : A \to B$:

- Se denotan al **dominio** y al **codominio** de f como: $A = \mathrm{Dom}(f)$ y $B = \mathrm{Codom}(f)$, respectivamente.
- Si x es un elemento del dominio de f, se llama **imagen** de x por f al elemento $y = f(x)$ (que está en el codominio). También se dice que x es una **preimagen** de y por f.
- Si $S \subset A$, la **imagen** de S por f es el conjunto de las imágenes de todos los elementos $x \in S$:

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\} = \{y \in B : \exists x \in S(y = f(x))\}.$$

- La **imagen** de f es el conjunto de las imágenes de todos los elementos x del dominio, y se denota:

$$\mathrm{Im}(f) = f(A) = f(\mathrm{Dom}(f)).$$

Preimagen

Dada una función $f : A \to B$, consideremos un subconjunto E del codominio de f (o sea, $E \subset B$).

Preimagen

Dada una función $f : A \to B$, consideremos un subconjunto E del codominio de f (o sea, $E \subset B$).

Definimos la **preimagen** de E por f como el conjunto S de todas las preimágenes $x \in A$ de elementos $y \in E$, y lo denotamos $S = f^{-1}(E)$:

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}.$$

Preimagen

Dada una función $f : A \to B$, consideremos un subconjunto E del codominio de f (o sea, $E \subset B$).

Definimos la **preimagen** de E por f como el conjunto S de todas las preimágenes $x \in A$ de elementos $y \in E$, y lo denotamos $S = f^{-1}(E)$:

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}.$$

¿Puede la pregimagen de un conjunto, por f, dar el conjunto vacío?
Respuesta: **SÍ.** ¿Por qué? ¿Ejemplos?

Ejemplos de funciones numéricas

- Función dada por fórmula: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Una función definida **a trozos** o **por tramos**:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ e^x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(p/q) = q$, siempre que p/q sea la forma simplificada de una fracción con p, q enteros, $q > 0$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
  Esta expresión denota el **piso** de x, es decir, el número entero más cercano que precede (o es igual) a x en la recta numérica.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x \rceil$.
  Esta expresión denota el **techo** de x, es decir, el número entero más cercano que sigue (o es igual) a x en la recta numérica.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x^2 + y^2 = 1$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
  Además, hay elementos $x \in \mathbb{R}$ sin imagen.
- $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$; $y = e^x$.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x^2 + y^2 = 1$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
  Además, hay elementos $x \in \mathbb{R}$ sin imagen.
- $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$; $y = e^x$.

Ejemplos que no son funciones

Los ejemplos que siguen, no son funciones por diversos motivos:

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x = y^2$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y) \in f$ si, y sólo si, $x^2 + y^2 = 1$.
  No cumple: unicidad de la imagen.
  Además, hay elementos $x \in \mathbb{R}$ sin imagen.
- $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$; $y = e^x$.
  No cumple: hay elementos x del dominio cuya imagen no pertenece al codominio.

Igualdad de funciones, gráfico

¿Cuándo dos funciones $f : A \to B$, $g : A' \to B'$ son **iguales**?

Igualdad de funciones, gráfico

¿Cuándo dos funciones $f : A \to B$, $g : A' \to B'$ son **iguales**?
Ambas funciones son iguales si coinciden sus dominios, sus codominios, y sus reglas de asignación:

$$A = A', \quad B = B', \quad \forall x \in A : f(x) = g(x).$$

Igualdad de funciones, gráfico

¿Cuándo dos funciones $f : A \to B$, $g : A' \to B'$ son **iguales**?
Ambas funciones son iguales si coinciden sus dominios, sus codominios, y sus reglas de asignación:

$$A = A', \quad B = B', \quad \forall x \in A : f(x) = g(x).$$

Dada una función $f : A \to B$, se define su **gráfico** como el conjunto de elementos $(x, y) \in A \times B$ tales que $y = f(x)$. En símbolos:

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Más ejemplos de funciones numéricas

- **Módulo de números complejos:**
  $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$; $f(z) = |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.
- **Longitud de un vector de n dimensiones:**
  Denotando $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

- **Proyección en los ejes cartesianos:**
  Para $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \qquad f_j(x) = f_j((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_j.$$

- **Proyección de un vector en la esfera de $\mathbb{R}^n$:**

$$f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n; \qquad f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Funciones especiales

- **Función identidad:** Si $A \subset B$ y $\iota : A \to B$, definimos:

$$\iota(x) = x, \qquad x \in A.$$

- **Función constante:** Dados conjuntos A, B, se dice que $f : A \to B$ es una **función constante** si existe $c \in B$ tal que:

$$\forall x \in A : f(x) = c.$$

- **Función característica:** Dado un conjunto V, tomemos un subconjunto $A \subset V$. Definimos:

$$1_A : V \to \{0,1\}; \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A; \\ 0; & x \in V - A. \end{cases}$$

Propiedades de la función característica

Dado un conjunto V, y dados subconjuntos A, B, de V, demostrar que valen las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
1_A(x)1_B(x) &= 1_{A\cap B}(x) \\
\min\{1_A(x), 1_B(x)\} &= 1_{A\cap B}(x) \\
\max\{1_A(x), 1_B(x)\} &= 1_{A\cup B}(x) \\
1 - 1_A(x) &= 1_{V-A}(x) \\
1_V(x) &= 1 \\
1_\emptyset(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Funciones inyectivas, suryecticas, biyectivas

Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que:

- f es **inyectiva** si las preimágenes no se repiten, vale decir:

$$\forall x, y \in B : x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$

- f es **suryectiva** si todo elemento del codominio tiene preimagen, vale decir:

$$\forall y \in B : (\exists x \in A : [y = f(x)]).$$

- f es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.
  O sea que todo elemento del codominio tiene una y solo una preimagen en el dominio.

Ejercicio: Discuta ejemplos de funciones que son inyectivas, y otras que no lo son; funciones que son suryectivas, y otras que no lo son; funciones que son biyectivas, y otras que no lo son.

Permutaciones

Dado un conjunto A, el conjunto de todas las funciones $f : A \to A$ que son biyectivas se denomina **conjunto de permutaciones de A**.

Permutaciones

Dado un conjunto A, el conjunto de todas las funciones $f : A \to A$ que son biyectivas se denomina **conjunto de permutaciones de A**.

Las permutaciones de un conjunto finito suelen representarse con la notación de apareamiento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutaciones

Dado un conjunto A, el conjunto de todas las funciones $f : A \to A$ que son biyectivas se denomina **conjunto de permutaciones de A**.

Las permutaciones de un conjunto finito suelen representarse con la notación de apareamiento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dado un conjunto finito A con cardinal n, ¿cuántas funciones biyectivas hay de A en A?

Composición de funciones

Dadas dos funciones $f : A \to B$, $g : E \to C$, deseamos definir una función que componga las acciones de f y g, mediante la regla $g(f(x))$, para cada $x \in A$.
Para poder llevar a cabo esto, es necesario que se cumpla la condición de que el codominio de f esté contenido en el dominio de g.

Definición del producto de composición de funciones

Definición: Dados funciones $f : A \to B$, $g : \tilde{B} \to C$, tales que $B \subset \tilde{B}$, definimos su composición $h : A \to C$, mediante la regla de asignación:

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in A.$$

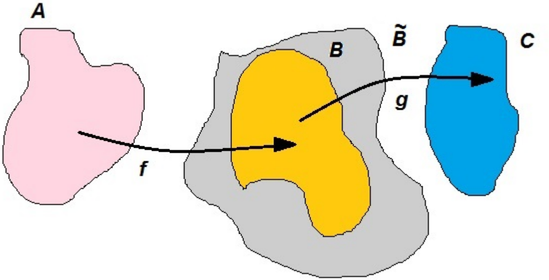
Denotaremos $h = g \circ f$.

Definición del producto de composición de funciones

Definición: Dados funciones $f : A \to B$, $g : \tilde{B} \to C$, tales que $B \subset \tilde{B}$, definimos su composición $h : A \to C$, mediante la regla de asignación:

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in A.$$

Denotaremos $h = g \circ f$.

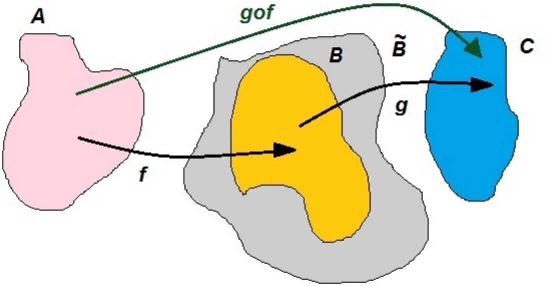


Definición del producto de composición de funciones

Definición: Dados funciones $f : A \to B$, $g : \tilde{B} \to C$, tales que $B \subset \tilde{B}$, definimos su composición $h : A \to C$, mediante la regla de asignación:

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in A.$$

Denotaremos $h = g \circ f$.



Asociatividad del producto de composición

Propiedad asociativa: Sean $f : A \to B$, $g : \tilde{B} \to C$, $h : \tilde{C} \to D$, tales que $B \subset \tilde{B}$, $C \subset \tilde{C}$. Entonces existen los productos de composición $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ (es decir, están bien definidos como funciones), y además:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ejercicio: Demostrar la propiedad asociativa.

Función inversa

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva.
En ese caso, el conjunto de pares ordenados $\Gamma = \{(y, x) : y = f(x)\}$ define una regla de asignación entre los conjuntos B y A, y más aún Γ determina una función biyectiva de B en A, que denotaremos f^{-1}, y que llamaremos la **función inversa de f**:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Función inversa

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva.
En ese caso, el conjunto de pares ordenados $\Gamma = \{(y, x) : y = f(x)\}$ define una regla de asignación entre los conjuntos B y A, y más aún Γ determina una función biyectiva de B en A, que denotaremos f^{-1}, y que llamaremos la **función inversa de f**:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Una función f tiene inversa solamente cuando f es biyectiva.

Función inversa

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva.
En ese caso, el conjunto de pares ordenados $\Gamma = \{(y, x) : y = f(x)\}$ define una regla de asignación entre los conjuntos B y A, y más aún Γ determina una función biyectiva de B en A, que denotaremos f^{-1}, y que llamaremos la **función inversa de f**:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Una función f tiene inversa solamente cuando f es biyectiva.
En este caso, dado un conjunto $E \subset B$, la imagen de E por la función f^{-1} coincide con la preimagen de E por la función f.
En ambos casos se denota como $f^{-1}(E)$, lo cual constituye un **abuso de notación**. Se denotan dos conceptos distintos con una misma notación, y el contexto quitará toda posible ambigüedad.

Propiedades de la función inversa

- Una función biyectiva tiene una sola función inversa.

Propiedades de la función inversa

- Una función biyectiva tiene una sola función inversa.
- **Involución.** Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Propiedades de la función inversa

- Una función biyectiva tiene una sola función inversa.
- **Involución.** Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces: $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Una función $f : A \to B$ tiene función inversa si, y sólo si, existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \iota_A$ y $f \circ g = \iota_B$, donde $\iota_A : A \to A$ denota la función identidad de A, y $\iota_B : B \to B$ la función identidad de B.
  En tal caso, se cumple que $g = f^{-1}$ y que $f = g^{-1}$.

Propiedades de la función inversa

- Una función biyectiva tiene una sola función inversa.
- **Involución.** Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces: $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Una función $f : A \to B$ tiene función inversa si, y sólo si, existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \iota_A$ y $f \circ g = \iota_B$, donde $\iota_A : A \to A$ denota la función identidad de A, y $\iota_B : B \to B$ la función identidad de B.
  En tal caso, se cumple que $g = f^{-1}$ y que $f = g^{-1}$.
- Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, son funciones biyectivas, entonces también lo es $g \circ f : A \to C$, y se tiene que su inversa $(g \circ f)^{-1}$ es una función con dominio C, codominio A, y que cumple:
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Propiedades de la función inversa

- Una función biyectiva tiene una sola función inversa.
- **Involución.** Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces: $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Una función $f : A \to B$ tiene función inversa si, y sólo si, existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \iota_A$ y $f \circ g = \iota_B$, donde $\iota_A : A \to A$ denota la función identidad de A, y $\iota_B : B \to B$ la función identidad de B.
  En tal caso, se cumple que $g = f^{-1}$ y que $f = g^{-1}$.
- Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, son funciones biyectivas, entonces también lo es $g \circ f : A \to C$, y se tiene que su inversa $(g \circ f)^{-1}$ es una función con dominio C, codominio A, y que cumple:
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Investigar: ¿Cómo se definen las nociones de **inversa por la izquierda**, **inversa por la derecha**, y cómo se relacionan con las propiedades de inyectividad y suryectividad de funciones?

Álgebra del producto de composición

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones biyectivas de A en A. Sea $\iota : A \to A$ la función identidad sobre A.
Tenemos que:

1. $\forall f \in \mathcal{F} : f \circ \iota = f = \iota \circ f$.
2. $\forall f, g, h \in \mathcal{F} : (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. $\forall f \in \mathcal{F} : (f^{-1})^{-1} = f$.
4. $\forall f, g \in \mathcal{F} : (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
5. $\forall f \in \mathcal{F} : f \circ f^{-1} = \iota = f^{-1} \circ f$.

En general no podemos esperar que el producto de composición sea conmutativo.

Producto de permutaciones

Se denomina **producto de permutaciones** de un conjunto A al producto de composición de funciones considerado sobre el conjunto de funciones biyectivas de A en A.

Producto de permutaciones

Se denomina **producto de permutaciones** de un conjunto A al producto de composición de funciones considerado sobre el conjunto de funciones biyectivas de A en A.

Este concepto tiene mucho interés cuando el conjunto A es finito.

Producto de permutaciones

Se denomina **producto de permutaciones** de un conjunto A al producto de composición de funciones considerado sobre el conjunto de funciones biyectivas de A en A.

Este concepto tiene mucho interés cuando el conjunto A es finito.

Ejemplo: ¿Cuál es la composición de las siguientes permutaciones sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau \circ \sigma = ??$$

Cardinalidad

Un conjunto finito A tiene cardinal n si, y sólo si, existe una función biyectiva $\phi : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow A$.
O sea que podemos contar, enumerar, los elementos de A.

Cardinalidad

Un conjunto finito A tiene cardinal n si, y sólo si, existe una función biyectiva $\phi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.
O sea que podemos contar, enumerar, los elementos de A.

Para conjuntos infinitos usamos el siguiente concepto:

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se dice que tienen **el mismo cardinal** si existe una función biyectiva $\phi : A \to B$.
Intuitivamente, esto nos permite establecer una correspondencia **uno-a-uno** de los elementos de A con los elementos de B.

Comparando cardinales de conjuntos

Comparando cardinales de conjuntos

Teorema.

Todo conjunto infinito A tiene algún subconjunto propio A' (o sea, se le han quitado algunos elementos a A) tal que A y A' tienen el mismo cardinal.

Comparando cardinales de conjuntos

Teorema.

Todo conjunto infinito A tiene algún subconjunto propio A' (o sea, se le han quitado algunos elementos a A) tal que A y A' tienen el mismo cardinal.

Preguntas: ¿Cuáles de los siguiente conjuntos tienen el mismo cardinal, y cuáles no?

$$\mathbb{N}, \mathbb{N} - \{1\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (-\pi, \pi), \mathbb{R}.$$