

Matemática Discreta - Ejercicios

UNCPBA

Cursada 2017

Notación:

- \mathbb{N} : Conjunto de números naturales (sin el 0).
- \mathbb{N}_0 : Conjunto de números naturales (con el 0).
- \mathbb{Z} : Conjunto de números enteros.
- \mathbb{Q} : Conjunto de números racionales.
- \mathbb{R} : Conjunto de números reales.
- \mathbb{C} : Conjunto de números complejos.

1 CONJUNTOS, FUNCIONES, RELACIONES

RECOMENDACIÓN GENERAL: En todos los ejercicios que siguen, se recomienda esbozar un gráfico, o un esquema, o un diagrama, para apoyar gráficamente la resolución del problema.

1.1 CONJUNTOS

1. En cada caso, para el conjunto universal U que se indica, probar que las proposiciones dadas son falsas exhibiendo un contraejemplo, es decir, exhibiendo un valor de $x \in U$ tal que la proposición afectada por el cuantificador \forall es falsa (o equivalentemente, demostrando que la negación es verdadera para todo x de U).

a) $U = \mathbb{R}; \forall z[-|z + 1| < 0]$.

b) $U = \mathbb{N}_0; \forall x \forall y[y > 1 - x]$.

c) $U = \mathbb{R}; \forall x \exists y[xy = 1]$.

d) $U = \mathbb{R}; \forall x[(x - 3)^2 < x]$.

e) $U = \mathbb{N}; \forall n[n > 2^n \vee n = n/2]$.

f) $U = \mathbb{N}; \forall x \forall y \exists z[\frac{x}{y-x} = 1]$.

En cada caso discutir si es posible redefinir U (es decir, cambiando el conjunto universal por otro), tal que la correspondiente proposición resulte verdadera.

2. Dado el conjunto

$$C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{N} \cup \{\pi\}, \{a, b, c\}, a, b, d\}$$

- Indicar el número de elementos de C y listar todos sus subconjuntos con 0, 1, 2 y 3 elementos.
- Esbozar un procedimiento para hacer la lista de todos los subconjuntos.
- Si un conjunto A tiene n elementos, ¿cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de subconjuntos (o de partes) de A ?

3. Dados conjuntos A, B, C , probar que:

- $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Esta situación se denota abreviadamente:

$$A \subset B \subset C.$$

- Explicar en detalle la cadena de contenciones:

$$\{1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

atendiendo a la definición de estos conjuntos numéricos.

4. Dados subconjuntos A, B, C , de un conjunto universal U , verificar las Leyes del Álgebra de Conjuntos. Puede usarse el Principio de Dualidad.

5. Se dan los conjuntos:

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$$

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar y } n < 31\}$$

$$P_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n = 5k, \text{ algún entero } k\}$$

Describir los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . En cada caso verificar si es posible que el subconjunto esté contenido en \mathbb{N} .

- $P \cap M$
- $P \cup M$
- $M - M_1$
- $P - (P_1 \cap I)$
- $I \cup \mathbb{N}$
- $(M_1 - P_1) \cap I$
- $P \Delta M$
- $I \Delta \mathbb{N}$

i) $\mathbb{N} - (\mathbb{R} - I)$

6. Dados conjuntos A, B, C, D , probar que:

a) $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$.

b) $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$.

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

d) $A \Delta (B \Delta C) = (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)$
 $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

e) $A \Delta B \Delta C \Delta D =$

$$\begin{aligned} & (\bar{A} \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap \bar{B} \cap C \cap D) \cup \\ & (A \cap B \cap \bar{C} \cap D) \cup (A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup \\ & (A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{D}) \cup \\ & (\bar{A} \cap \bar{B} \cap D \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap D) \end{aligned}$$

f) A partir de d) y e) inferir una ley de formación para escribir $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ en términos de uniones, intersecciones y complementaciones, para todo $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

g) Dar un argumento que pruebe el siguiente hecho: la diferencia simétrica de n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , consta de aquellos elementos x que están presentes exactamente en una cantidad impar de dichos conjuntos.

7. Dados conjuntos A, B, C , probar que:

a) $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$

b) $(A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C$

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

d) $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$

8. Para las siguientes familias $(A_i)_{i \in I}$ que se indican, calcular $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcap_{i \in I} A_i$.

a) $I = \{4, 5, 6, 10\}$; $A_i = \{d \in \mathbb{N} : d \text{ divide a } i\}$.

b) $I = \mathbb{N}$; $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$.

c) $I = \mathbb{N}$; $A_i = \{i\} \times \{i\}$.

d) $I = \mathbb{N}$; $A_i = [i, \infty)$.

e) $I = \mathbb{N}$; $A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$.

f) $I = \mathbb{R}$; A_i es el círculo cerrado en el plano \mathbb{R}^2 de radio i^2 con centro en $(0, 0)$.

9. Dada una familia indexada de conjuntos $(A_i)_{i \in I}$, con un conjunto de índices I , y dado un conjunto B , siendo todos ellos subconjuntos de un conjunto universal U , probar las leyes distributivas y de De Morgan:

a) $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

b) $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

c) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$

d) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$

1.2 FUNCIONES

1. Para cada una de las funciones f que se den a continuación, verificar que, en efecto, están bien definidas como tales, describir los pares de $\text{Gr}(f)$ y bosquejar cuando sea posible. En cada caso, calcular $\text{Im}(f)$.

a)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}; f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

b)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}; f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es par}, \\ 1, & \text{si } x \text{ es impar}. \end{cases}$$

c)

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f(m) = m - 1.$$

d)

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = |x|.$$

e)

$$f : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n; f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

- f) Dado un $a \in \mathbb{Z}$ prefijado, analizar los distintos posibles casos:

$$f : \mathbb{R} - \mathbb{Z}; f(x) = \lfloor ax \rfloor.$$

2. Calcular los valores de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a)

$$f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor; \quad x \in \mathbb{R}.$$

b)

$$f(x) = \lceil 3x \rceil - \lfloor x \rfloor; \quad x \in \mathbb{R}.$$

c)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\lceil x \rceil} \left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor; \quad x = \pi, x = e, x = n! \quad (n = 2, 3, 4).$$

d)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} \left\lceil \frac{x}{i} \right\rceil; \quad x = \pi, x = e, x = n! \quad (n = 2, 3, 4).$$

3. Calcular todos los $x \in \mathbb{R}$ que verifican:

a) $5\lfloor x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor.$

b) $7\lceil 3x \rceil = \lceil 7x \rceil.$

c) $\lfloor x + 7 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 7.$

d) $3\lceil x \rceil = \lceil 3x \rceil.$

4. a) Sean A un conjunto con n elementos y B un conjunto de m elementos, calcular cuántas funciones inyectivas se pueden definir de A en B , y cuántas biyectivas.
- b) Listar todas las funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$, y todas las funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ indicando cuáles son inyectivas y cuáles suryectivas.
- c) Para las siguientes permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, hallar todos los **productos**, las inversas, y las inversos de todos los productos.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Dados dos conjuntos A , B , y una función $f : A \rightarrow B$, para cada una de las proposiciones que se dan a continuación, indicar si alguna de ellas equivale a alguna o ninguna de las siguientes propiedades de f o su negación:

{i} f está bien definida.

{ii} f es inyectiva.

{iii} f es suryectiva.

{iv} f es biyectiva.

- a) $\forall x \in A (\exists! y \in B [f(x) = y])$.
- b) $\exists x \in A (\forall y \in B [f(x) \neq y])$.
- c) $\forall x \in A (\forall y \in B [f(x) = y])$.
- d) $\forall x \in A (\exists y \in B [f(x) = y])$.
- e) $\forall x \in A (\forall y \in A [f(x) = f(y) \implies x = y])$.
- f) $\forall x \in A (\exists y \in B (\exists z \in B [f(x) = z = y]))$.
- g) $\forall y \in B (\exists! x \in A [f(x) = y])$.
- h) $\exists x \in A (\exists z \in A [x \neq z \wedge f(x) = f(z)])$.

6. Dadas las siguientes funciones

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\};$$

$$f_2 : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$f_5 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R};$$

$$f_6 : \mathbb{R} - [0, 1) \rightarrow \mathbb{R};$$

$$f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z};$$

$$f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z};$$

$$f_1(n) = (-1)^n$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f_3(z) = \lceil x \rceil.$$

$$f_4(z) = \lfloor x \rfloor.$$

$$f_5(z) = |z|.$$

$$f_6(x) = \frac{1}{|x|}.$$

$$f_7(z) = \lceil \lceil x \rceil \rceil.$$

$$f_8(z) = \lceil \lceil x \rceil \rceil.$$

i) Para cada par i, j , indicar cuándo está definida la composición de funciones $f_i \circ f_j$ (es decir, cuándo se cumple $\text{Im}(f_j) \subset \text{Dom}(f_i)$).

ii) Calcular:

a) $f_1(\{3^m + 5 : m \in \mathbb{N}\})$

b) $f_3([0, 1])$

c) $f_7([-3.5, 12])$

d) $f_1^{-1}(\{1\})$

e) $f_4 \circ f_8(\mathbb{N})$

f) $f_5([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

g) $f_8(-\mathbb{N})$ (aquí $-\mathbb{N}$ representa los enteros negativos).

h) $f_3^{-1}([0, 1])$

i) $f_2(\mathbb{R}_{\geq 0})$

j) $f_6([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

k) $f_3 \circ f_i(\mathbb{N})$

l) $f_8^{-1}(\{-3\})$

7. Probar que cada una de las funciones que siguen son biyectivas y calcular sus inversas:

a) $f : \mathbb{R}_{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0};$

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$

$$f(m) = m^3 - 1.$$

c) $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\};$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$;
 $f(x, y) = (3x + 2y, x - y)$.

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$;
 $f(x) = 2^x$.

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$;
 $f(x) = \lceil [x] \rceil$.

8. Dados los conjuntos A, B, C , y las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, probar:

- Si f y g son ambas inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f y g son ambas suryectivas, entonces $g \circ f$ es suryectiva.
- Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
- Si $g \circ f$ es suryectiva, entonces g es suryectiva.
- Mostrar con un ejemplo que si $g \circ f$ es biyectiva, entonces no necesariamente f es biyectiva o g es biyectiva.

9. Dados dos conjuntos A, B , una función $f : A \rightarrow B$, una función $g : B \rightarrow C$; si A_1, A_2 , son subconjuntos de A ; si B_1, B_2 , son subconjuntos de B ; y C_1 es subconjunto de C ; probar que:

- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
- Mostrar un contraejemplo en el que la inclusión siguiente sea falsa:
 $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- $(g \circ f)^{-1}(C_1) = f^{-1}(g^{-1}(C_1))$.
- $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \cap \text{Im}(f) \subset B_1$.
- Deducir del ítem anterior que si f es suryectiva, entonces:
 $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$.
- $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.
- Exhibir un contraejemplo en el que la siguiente inclusión sea falsa:
 $f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$.

10. Mostrar una biyección entre:

- Los enteros positivos y los enteros negativos.
- Los enteros no negativos y los enteros negativos.
- Los enteros pares y los enteros impares.

11. Dar ejemplos de funciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tales que:

- a) f es inyectiva pero no suryectiva.
- b) f es suryectiva pero no inyectiva.
- c) f es biyectiva y distinta de $1_{\mathbb{Z}}$.

1.3 RELACIONES

1. Dados un conjunto M y una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ definida en M , en cada uno de los casos siguientes averiguar si \mathcal{R} es **reflexiva**, **simétrica**, **antisimétrica**, y/o **transitiva**.

- a) $M = \mathbb{N}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : m + n \text{ es par}\}$.
- b) $M = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : 2 \text{ divide a } m - n\}$.
- c) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x < y\}$.
- d) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x = y\}$.
- e) $M = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$.
- f) $M = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : |x - y| \leq 2\}$.
- g) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x = \lfloor y \rfloor\}$.
- h) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$.
- i) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : x \leq y\}$.
- j) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : x - y \in \mathbb{Q}\}$.

2. Dados un conjunto M y una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ en M , definimos **la relación inversa de \mathcal{R}** como:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}.$$

Para cada una de las relaciones \mathcal{R} definidas en el **Ejercicio 1**, hallar \mathcal{R}^{-1} .

3. Dados un conjunto M y una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ en M , demostrar o refutar cada una de las afirmaciones siguientes:

- a) $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$.
- b) $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = M \times M$.
- c) $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.
- d) Si \mathcal{R} es reflexiva, entonces \mathcal{R}^{-1} es reflexiva.
- e) Si \mathcal{R} es simétrica, entonces \mathcal{R}^{-1} es simétrica.
- f) Si \mathcal{R} es antisimétrica, entonces \mathcal{R}^{-1} es antisimétrica.

4. Dados un conjunto M y dos relaciones $\mathcal{R}_1 \subset M \times M$, $\mathcal{R}_2 \subset M \times M$, en M , probar o refutar cada una de las afirmaciones siguientes:

- a) Si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son reflexivas, entonces:
- $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ es reflexiva.
 - $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es reflexiva.
- b) Si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son simétricas, entonces:
- $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ es simétrica.
 - $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es simétrica.
- c) Si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son antisimétricas, entonces:
- $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ es antisimétrica.
 - $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es antisimétrica.

5. Dados los siguientes conjuntos M y las relaciones \sim , probar que:

- \sim es relación de equivalencia,
- para cada $a \in M$: describir $[a]$, la clase de equivalencia de a , y
- hallar un conjunto de representantes (es decir describir el conjunto cociente M/\sim).

- $M = \mathbb{Z}$; $n \sim m \iff n$ es par.
- $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff x = y$.
- $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff |x| = |y|$.
- $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
- $M = \mathbb{R}^2$; $(x, y) \sim (z, t) \iff x = z$.
- $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff \exists \lambda \neq 0 [y = \lambda x]$.

6. Sea $M = \{\textcircled{a}, 0, 1, 2, a, b\}$. Se define en M un orden total \leq como:

$$\textcircled{a} \leq 0 \leq 1 \leq a \leq b.$$

- a) Ordenar las siguientes palabras en el orden lexicográfico, y en el orden lexicográfico inverso (el caracter \textcircled{a} representa el espacio en blanco y no se escribe).

$2a$	$aaaaaa$	10
210	$20a$	$a10b2$
$10a2ba$	$0aaaa$	$2aa1$
$bbba$	21	100

- b) Definir en M el orden inverso al dado y realizar la misma tarea que en el inciso a).

7. Sea $M = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y consideremos en ese conjunto al orden lexicográfico.

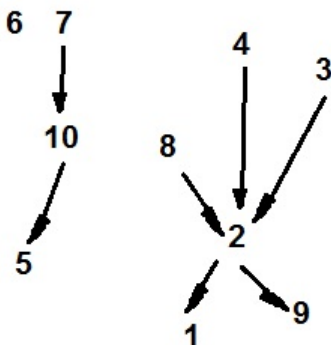
Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

- $(2, 12) \leq (5, 3)$.
- $(4, 8) \leq (4, 6)$.

c) $(15, 3) \leq (12, 64)$.

d) $(3, 6) \leq (3, 24)$.

8. Sea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define en M un orden parcial por el diagrama:



i) Hallar los elementos maximales y los elementos minimales de M .

¿Existen máximos o mínimos?

ii) Para cada uno de los subconjuntos de M que se indican, hallar cotas superiores e inferiores y, cuando existan, supremos e ínfimos, indicando cuando son máximos o mínimos.

a) $\{1, 2\}$

b) $\{9\}$

c) $\{2, 5, 7\}$

d) $\{10, 2\}$

e) $\{6, 7\}$

f) $\{5, 7, 10\}$

g) $\{1, 5\}$

h) $\{3\}$

iii) Definir en M un orden que convierta a M en un reticulado, pero que no sea un orden total.

9. Demostrar que un conjunto totalmente ordenado es un reticulado.

10. En el conjunto de números naturales \mathbb{N} , se define una relación \prec por:

$$m \prec n : \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que \prec es una relación de orden parcial en \mathbb{N} .

b) Probar que (\mathbb{N}, \prec) es un reticulado.

Sugerencia: Primero hacer un diagrama de Hasse.

11. Se define la relación \sim en \mathbb{Z} de modo que $n \sim m$ si $n^2 - m^2$ es múltiplo de 2.

a) Probar que \sim es relación de equivalencia.

b) Para cada $m \in \mathbb{Z}$, calcular $[m]$, la clase de equivalencia de m .

12. Clausura transitiva de una relación.

Sean M un conjunto y $(\mathcal{R})_{i \in I}$ una familia de relaciones $\mathcal{R}_i \subset M \times M$, indexada por un conjunto de índices I .

a) Demostrar que: si para todo $i \in I$ la relación \mathcal{R}_i es transitiva, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ es transitiva.

b) Dada una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ en M , probar que existe una relación transitiva \mathcal{R}' en M tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

c) ¿Es verdad que la familia $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ de todas las relaciones transitivas en M que contienen a \mathcal{R} es no vacía?

¿Es verdad que la relación $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ es transitiva y contiene a \mathcal{R} ?

Llamemos a $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ la **clausura transitiva de \mathcal{R}** .

Demostrar que si \mathcal{R}' es una relación transitiva tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, entonces $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}'$.

[Es decir que $\tilde{\mathcal{R}}$ es la menor relación transitiva que contiene a \mathcal{R} .]

d) Hallar la clausura transitiva de las siguientes relaciones:

i) $M = \{a, b, c, d, e\}$; $\mathcal{R} = \{(a, b), (c, d)\}$.

ii) $M = \{a, b, c, d, e\}$; $\mathcal{R} = \{(a, d), (e, f)\}$.

iii) $M = \{a, b, c, d, e\}$; $\mathcal{R} = \{(a, d), (d, a), (a, e)\}$.

iv) $M = \mathbb{N}$; $\mathcal{R} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$.

13. Dados los conjuntos A, B , y la relación $F \subset A \times B$, que se dan abajo en cada caso, determinar cuándo F define una relación funcional. Si no lo define, hallar un subconjunto $A' \subset A$, maximal, tal que $F' = \{(a, b) \in F; a \in A'\}$ defina una relación funcional:

a) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $F = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

b) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $F = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

c) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}$; $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

d) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{Z}$; $F = \{(x, [x]) : x \in \mathbb{R}\}$.

e) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{Z}$; $F = \{(m, m^2) : m \in \mathbb{Z}\}$.

f) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}$; $F = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

14. Dados dos conjuntos A, B , y una función $f : A \rightarrow B$, se define una relación \simeq_f en A , mediante:

$a \simeq_f b$ si, y sólo si, $f(a) = f(b)$, para cada $a, b \in A$.

a) Probar que \simeq_f define una relación de equivalencia en A .

b) Probar que es posible definir una función $\tilde{f} : A / \simeq_f \rightarrow B$, que llamaremos **la función inducida por f** , mediante:

$\tilde{f}([a]) = f(a)$, para cada clase de equivalencia $[a] \in A / \simeq_f$.

Nota: Se requiere comprobar que \tilde{f} es, en efecto, una función, lo cual obliga a que se cumpla el requisito de unicidad de la imagen. Tener en cuenta que una clase de equivalencia en general tiene muchos representantes distintos.

2 NÚMEROS ENTEROS

2.1 DIVISIBILIDAD

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, señalar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Si son verdaderas, demostrarlas, si son falsas dar un contraejemplo.

Además discutir si siguen siendo verdaderas o falsas al restringirlas a los enteros positivos.

- $a|b \implies a|(b+c)$ (para todo entero c).
 - $a|b \implies a \leq b$.
 - $a|bc \implies a|b \vee a|c$.
 - $0|a \implies a = 0$.
 - $a|bc \wedge a \nmid c \implies a|b$.
 - $a|(b+c) \wedge a|b \implies a|c$.
2. Sean a un entero y $D(a)$ el conjunto de todos los divisores positivos de a :

$$D(a) = \{d \in \mathbb{Z} : d > 0 \wedge d|a\}.$$

- Listar los elementos de $D(a)$ para $a = 0, 1, 2, 4, 17, 102, 15^{15}$.
 - Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$: $D(a) = D(-a)$, y que $|a| \in D(a)$.
 - Probar que, para todos los $x, a \in \mathbb{Z}$, $x \in D(a) \implies D(x) \subset D(a)$.
En palabras: "si x es divisor positivo de a , entonces todo divisor d de x también es divisor de a ".
 - Sea $a \in \mathbb{N}$. Se define $f : D(a) \rightarrow D(a)$ por $f(x) = a/x$, para cada $x \in D(a)$. Probar que f es biyectiva.
 - Sea $a \in \mathbb{N}$. Probar que hay a lo sumo dos elementos $x \in D(a)$ que verifican $x \geq a/2$.
 - Calcular $D(a) \cap D(b)$ en los siguientes casos:
 - $a = 1, b = 0$.
 - $a = 10, b = 5$.
 - $a = 20, b = 75$.
 - Se define en $D(a)$ una relación \prec por:

$$x \prec y \iff x|y, \text{ todo } x, y \in D(a).$$
 Probar que \prec es una relación de orden parcial en $D(a)$.
 Probar que $|a|$ es máximo en $D(a)$ para este orden. Dibujar diagramas de Hasse para este orden cuando $a = 1, 2, 4, 10, 12, 16$.
3. Dados $a, m \in \mathbb{N}$, $a \leq m$, hallar la cantidad de múltiplos de a que son positivos y menores que o iguales a m .
4. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall n \in \mathbb{N}$:
- $3|n^3 - n + 3$.
 - $4|5^n - 1$.
 - $11|9 \cdot 2^n 6^{n+1} + 1$.
 - $9|(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5)$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, probar que:

- a) $\forall n \in \mathbb{N} : a - b \mid a^n - b^n$.
- b) $\forall n \in \mathbb{N} : (a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$.
- c) $\forall n \in \mathbb{N} : (a + b) \mid (a^{2n+1} + b^{2n+1})$.

De estos incisos, deducir los siguientes:

- d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ par} : 10 \mid (7^n - 3^n)$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid 7^n - 3^n$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impar} : 10 \mid (7^n + 3^n)$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impar} : 4 \mid (3^n + 1)$.

6. Demostrar los siguientes enunciados:

- a) Dados n enteros consecutivos, $n \geq 1$, alguno de ellos es divisible por n .
- b) Dado $n \geq 1$, $n!$ divide al producto de n enteros consecutivos cualesquiera.

7. Calcular el cociente y el resto de dividir a por b en los siguientes casos:

- a) $a = 320; b = 7$
- b) $a = n^2 - 1; b = n$ (todo $n \in \mathbb{N}$)
- c) $a = -150; b = -13$
- d) $a = 18; b = -3$
- e) $a = n^2; b = n - 1$ (todo $n \in \mathbb{N}$)
- f) $a = a = -150; b = 13$

8. Si el resto de dividir el entero a por b es r , calcular en cada caso el cociente q al dividir c por b .

- a) $c = 2a, b = 7, r = 5$
- b) $c = 7a + 1, b = 7, r = 5$
- c) $c = 1 - a, b = 2, r = 0$

2.2 CAMBIO DE BASE

1. Hallar los desarrollos en base 2 (2-ádico, binario), base 8 (8-ádico, octal) y base 16 (16-ádico, hexadecimal) de:

4, 8, 15, 16, 42, 256, 2^{10} .

Hallar el desarrollo en base 3 (3-ádico) de: 16, 124710.

2. Hallar el desarrollo en base 5 (5-ádico) de:

$(4350)_8 + 10x - 1$, donde $x = (1010)_{12}$.

3. Hallar la base s tal que: $(237)_s = 196$.

4. Hallar la base s tal que: $(173)_s$ es un cuadrado perfecto.

2.3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y NÚMEROS PRIMOS

El máximo común divisor de dos números enteros a y b se denota $(a : b)$ (o bien $\text{mcd}(a, b)$).

1. En los siguientes incisos, hallar $(a : b)$ y expresarlo como combinación entera de a y b :
 - a) $(24 : 331)$
 - b) $(31 : 101)$
 - c) $(111 : 73)$
 - d) $(-13 : 17)$

2. Hallar soluciones de las siguientes ecuaciones diofánticas lineales:
 - a) $10x + 5y = 23$
 - b) $51x + 219y = 36$
 - c) $2^n x + (2^n + 1)y = 3^n$ (todo $n \in \mathbb{N}$)

3. Resolver los siguientes problemas:
 - a) Al número 1630 se lo escribe como suma de dos números enteros, uno de ellos es múltiplo de 101 y el otro da 70, ¿cuál es la expresión general de esos números?
 - b) Los productos A y B cuestan \$150 y \$135 la tonelada. ¿Qué cantidades enteras de ambos pueden comprarse con \$6000?

4. Probar que, dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 1$, entonces:
 - a) $a|bc \implies a|c$
 - b) $a|c$ y $b|c \implies ab|c$.
 - c) Ahora suponer que $(a : b) \neq 1$ y dar contraejemplos de los enunciados de los incisos anteriores.

5. Hallar todos los números primos (positivos) p tales que $p \leq 200$.
 Determinar cuáles de los siguientes números son primos: 101, 103, $2^{64} - 1$.

6. Si se sabe que p y $p + 1$ son primos, ¿qué número es p ?

7. Probar que $n^4 + 4$ no es primo si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, p, q primos. Probar:
 - a) $p|a^2 \implies p|a$.
 - b) $p^2|a^2 \implies p|a$.
 - c) $p \neq q$, $p|a$, $q|a \implies pq|a$.
 - d) $b^2|a^2 \implies b|a$.
 - e) $a^2 = b^2 \implies a = b = 1$.
 - f) $pa^2 = qb^2 \implies p = q$.

9. Caracterizar los pares de números enteros a, b , tales que verifiquen $a^2 = b^2$.

10. Probar que los siguientes números reales no son racionales:

- a) $a + b\xi$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $\xi \notin \mathbb{Q}$.
- b) $\sqrt[p]{p}$, p primo, $n \in \mathbb{N}$.
- c) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$
- d) $\log_4 18$.

11. Probar que:

- a) $(a : a + 1) = 1$, para todo $a \in \mathbb{N}$.
- b) $(n^2 : (n + 1)^2) = 1$, todo $n \in \mathbb{N}$.
- c) $(a : b) = 1 \implies (8a + 3b : 3a + b) = 1$.

12. Probar que los valores posibles de $(n^2 - 1 : 3n + 1)$ (con valores de $n \in \mathbb{N}$ cualesquiera) son 1, 2, 4, 8.

Hallar para cada uno de estos valores un $n \in \mathbb{N}$ que lo verifique.

13. Sea p uno de los primos 2, 3, 5, 7. Hallar la máxima potencia de p que divide a $100!$.

14. Hallar la máxima potencia de 6 que divide a $100!$.

¿En cuántos ceros termina $2017!$?

2.4 CONGRUENCIAS

1. Resolver las siguientes ecuaciones de congruencia, dando todas las soluciones no congruentes según el módulo indicado, y todas las soluciones enteras.

- a) $132x \equiv -21 \pmod{18}$.
- b) $100x \equiv 15 \pmod{35}$.
- c) $-1050x \equiv 15 \pmod{351}$.

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones de congruencias.

- a)

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$
- b)

$$\begin{cases} 3x \equiv 0 \pmod{15} \\ 5x \equiv 13 \pmod{11} \end{cases}$$
- c)

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{5} \\ 5x \equiv 13 \pmod{6} \\ x \equiv 11 \pmod{17} \end{cases}$$

3. Dado un entero positivo a con desarrollo decimal $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, probar los siguientes criterios de divisibilidad:

a) **Divisibilidad por 3:**

$$a \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}.$$

b) Divisibilidad por 5:

$$a \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{5}.$$

c) Divisibilidad por 9:

$$a \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{9}.$$

d) Divisibilidad por 11:

$$a \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n \equiv 0 \pmod{11}.$$

4. Sea p un primo. Probar que

$$ab \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p} \vee b \equiv 0 \pmod{p}.$$

5. Sea p primo. Probar que

$$(a + b)^{p^n} \equiv a^{p^n} + b^{p^n} \pmod{p},$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

6. Calcular el resto de la división de n por m según se indica en cada caso:

a) $n = 3^{1037}; m = 61$.

b) $n = 47^{7385}; m = 17$.

c) $n = 3 \cdot 9^{94} - 2 \cdot 42^{23}; m = 11$.

d) $n = \sum_{k=0}^{81} 2 \cdot 3^k; m = 7$.

7. Sea $m \in \mathbb{N}$. Dada la relación \equiv , de congruencia módulo m , se designa con \mathbb{Z}_m al conjunto cociente \mathbb{Z}/\equiv y

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}.$$

Probar que \mathbb{Z}_m es un anillo conmutativa con neutro $[0]_m$ e identidad $[1]_m$ con las operaciones de suma y producto entre clases de congruencia siguientes:

$$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$$

$$[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m.$$

8. Se denota con U_m a las unidades de \mathbb{Z}_m (es decir, aquellos elementos que tienen inverso multiplicativo).

Probar que $[1]_m \in U_m$ y que U_m es cerrado bajo el producto (es decir, que el producto de dos elementos de U_m es también un elemento de U_m).

Probar además que $[a]_m \in U_m$ implica $[a]_m^{-1} \in U_m$.

Hacer la tabla para el producto en U_m para $m = 2, 3, 5, 6, 10, 17$.

9. Si $m = 2, 3, 5, 7, 11$, averiguar qué elementos de \mathbb{Z}_m tienen raíces cuadradas o cúbicas.

10. Dado un primo p , factorizar el polinomio $x^p - x$ en $\mathbb{Z}_p[x]$.

3 ÁLGEBRAS BOOLEANAS

3.1 ÁLGEBRAS DE BOOLE Y DIAGRAMAS DE KARNAUGH

1. Probar que para elementos cualesquiera a, b, c , de un álgebra booleana, se cumple:

- (a) $a + a' \cdot b = a + b$
 (b) $a \cdot (a' + b) = a \cdot b$
 (c) $(a')' = a$
 (d) $a + (a \cdot b) = a$
 (e) $a \cdot (a + b) = a$
 (f) $(a' + b') + (a' + b')' = 1$
 (g) $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c' = a \cdot c + b \cdot c'$
 (h) $(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)' = a'b' + b'c' + c'a'$
 (i) $(a \cdot c + b \cdot c') = a' \cdot c + b' \cdot c'$

2. Sea $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. Definimos en \mathbf{B} las operaciones:

inversión	suma	producto	suma mód 2
$\overbrace{\begin{array}{ c c } \hline x & x' \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array}}$	$\overbrace{\begin{array}{ c c c } \hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}}$	$\overbrace{\begin{array}{ c c c } \hline \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}}$	$\overbrace{\begin{array}{ c c c } \hline \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}}$
INV	OR	AND	XOR

3. Probar que $(\mathbf{B}, \text{OR}, \text{AND}, \text{INV}, 0, 1)$ verifica los axiomas de un álgebra booleana.

4. Sea $n \geq 1$ un número natural. Con la misma estructura $(\mathbf{B}, \text{OR}, \text{AND}, \text{INV}, 0, 1)$ del inciso previo, designemos \mathbf{B}^n al conjunto de **vectores booleanos**:

$$\mathbf{B}^n = \{A = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{B}\}.$$

Dados $A, B \in \mathbf{B}^n$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, se definen las operaciones:

$$\begin{aligned} A' &= (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \\ A + B &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ A \cdot B &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) \\ A \oplus B &= (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n). \end{aligned}$$

Probar que:

a) $(\mathbf{B}^n, +, \cdot, ', \vec{0}, \vec{1})$ es un álgebra booleana, donde

$$\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ veces}}, \quad \vec{1} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ veces}}.$$

b) ¿Se verifica siempre la propiedad $A^2 = A$ en \mathbf{B}^n ?

c) En \mathbf{B}^n se define una relación \preceq diciendo que $(a_1, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_n)$ si, y sólo si: $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots$, y $a_n \leq b_n$.

- d) Dibujar los diagramas de Hasse para \preceq en \mathbf{B}^2 y \mathbf{B}^3 .
- e) Probar que, para todo $A, B \in \mathbf{B}^n$, se cumple: $A \preceq B$ si y sólo si $A \cdot B = A$,
- f) Probar que, para todo $A, B \in \mathbf{B}^n$, se cumple: $A \preceq B$ si y sólo si $A + B = B$.
- g) Probar que, para todo $A, B \in \mathbf{B}^n$, se cumple: $A + B = \sup\{A, B\}$, y que $A \cdot B = \inf\{A, B\}$.
- h) ¿Es (\mathbf{B}^n, \preceq) un reticulado?
5. Dadas las siguientes tablas, escribir la función booleana correspondiente y luego simplificar la expresión utilizando diagramas de Karnaugh.

a)

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

c)

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

d)

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1

6. Utilizando mapas de Karnaugh, minimizar cada una de las siguientes funciones booleanas. Además, para cada una de ellas, hallar su forma normal disyuntiva.

(a)
$$f(x, y) = x + x \cdot y' + y'$$

(b)
$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z' + x \cdot y \cdot z' + x' \cdot y \cdot z'$$

(c)
$$f(w, x, y, z) = w \cdot x + x \cdot y + y \cdot z + z \cdot w + w' \cdot x' \cdot y \cdot z' + w' \cdot x' \cdot y' \cdot z$$

(d)
$$f(w, x, y, z) = x' \cdot y \cdot z' + x' \cdot z \cdot w + x' \cdot y \cdot y \cdot z \cdot w' + x \cdot z \cdot w$$

7. Como responsable de una tómbola benéfica, Paula se ofreció a hacer una torta para vender. Las integrantes de la comisión ofrecen donar ingredientes necesarios según la tabla:

	Harina	Leche	Manteca	Dulce de Leche	Huevos
Susana	x		x		
Dolores			x	x	
Berta	x	x			
Teresa		x			x
Ruth		x	x	x	

Paula manda a su hija Sarita a recoger los ingredientes. Formular una expresión booleana que ayude a Paula a determinar qué conjunto de voluntarios debe visitar Sarita, para recoger los ingredientes necesarios, visitando en cada caso, un número mínimo de donantes.

8. Seis ciudades, numeradas del 1 al 6, están conectadas por carreteras según la siguiente **matriz de incidencia**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

En esta matriz, $a_{ij} = 1$ si y sólo si la ciudad i y la ciudad j están conectadas por una carretera.

Si $a_{ij} = 1$ diremos que la ciudad i y la ciudad j son **vecinas** ($a_{ii} = 1$ por convención).

Se desea construir hospitales en algunas de estas ciudades, de modo que cada ciudad tenga un hospital, o bien que sea vecina a otra que lo tenga.

¿En cuántos casos puede conseguirse esto, si se construye, para cada uno de estos casos, un número mínimo de hospitales?

9. Sea U un conjunto con n elementos (con $n \geq 3$).

Hallar el número de pares (X, Y) de subconjuntos de U tales que $X \cap Y = \emptyset$.

10. Para cada uno de los siguientes procesos que siguen, hallar la forma normal disyuntiva de la función booleana que describe el proceso, y construir un circuito simplificado.

a) Se desea encender una lámpara desde dos interruptores A y B de forma que cada vez que varíe el estado de cada uno de ellos la lámpara cambie de estado, además, si A y B están en un mismo estado, la lámpara debe iluminar.

b) Un jurado se constituye por 4 miembros: un presidente y 3 vocales. Cada uno de ellos provisto de un pulsador que acciona una luz, de manera que esta luz se enciende si dos vocales cualesquiera y el presidente pulsan el botón correspondiente.

c) Se da un subconjunto A del conjunto $\{0, 1, \dots, 15\}$. El esquema

$$\left. \begin{array}{l} a \rightarrow \\ b \rightarrow \\ c \rightarrow \\ d \rightarrow \end{array} \right\} \boxed{\text{Detector de elementos de } A} \rightarrow f(a, b, c, d),$$

debe dar $f(a, b, c, d) = 1$, si y sólo si, $abcd$ es el desarrollo binario de un elemento de A .

Dar la forma normal disyuntiva de la función booleana f , y diseñar un circuito simplificado del detector en cada uno de los siguientes casos:

- (i) A es el subconjunto de impares,
- (ii) A es el subconjunto de múltiplos de 3,
- (iii) A es el subconjunto de primos.

3.2 FUNCIONES DE VERDAD

Supongamos que tenemos una proposición $H = H(P, Q, R, \dots)$ construida a partir de aplicar las operaciones \vee , \wedge y \sim de manera válida (una **fórmula bien formada**) a ciertas proposiciones P, Q, R, \dots , las que llamaremos variables proposicionales.

Sabemos que entonces los valores de verdad de H se pueden calcular a partir de los juegos de valores de verdad de P, Q, R, \dots , por medio de una tabla de verdad.

Si a cada variable proposicional P le asignamos una **variable booleana** p (esto significa que $p \in \{0, 1\}$), llamamos f_P a la **función de verdad** de P , y escribimos:

$$f_P(p) = p,$$

entonces es posible asignar a cada $H = H(P, Q, R, \dots)$ una función booleana $f_H(p, q, r, \dots)$ a partir de las reglas:

Dadas $H = H(P, Q, R, \dots)$, $H_1 = H_1(P, Q, R, \dots)$, $H_2 = H_2(P, Q, R, \dots)$, entonces:

- Si $H = \sim H_1$, se define

$$f_H(p, q, r, \dots) = f_{H_1}(p, q, r, \dots)'$$

- Si $H = H_1 \vee H_2$, se define

$$f_H(p, q, r, \dots) = f_{H_1}(p, q, r, \dots) + f_{H_2}(p, q, r, \dots).$$

- Si $H = H_1 \wedge H_2$, se define

$$f_H(p, q, r, \dots) = f_{H_1}(p, q, r, \dots)f_{H_2}(p, q, r, \dots).$$

Sean H_1, \dots, H_n, C , proposiciones, y supongamos que $H_i = H_i(P, Q, R, \dots)$ y $C = C(P, Q, R, \dots)$, esto es, las H_i y C dependen de un número finito de variables proposicionales P, Q, R, \dots .

Decimos que C se **deduce lógicamente del conjunto de hipótesis** $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ si, para cada juego de valores de verdad de las variables P, Q, R, \dots , para las que todas las H_i son verdaderas, entonces C es verdadera.

Si C se deduce lógicamente del conjunto de hipótesis $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, escribiremos $\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \implies C$. También diremos que $\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \implies C$ es un **razonamiento válido**.

1. Si P, Q, R son variables proposicionales, calcular la forma normal disyuntiva y la forma simplificada de $f_H(p, q, r, \dots)$ para

a) $H = P \vee Q$,

b) $H = P \wedge Q$,

c) $H = \sim P$,

d) $H = P \bar{\vee} Q$,

e) $H = P \rightarrow Q$,

f) $H = \sim (P \vee Q) \wedge R$.

2. Discutir las analogías entre la tabla de verdad de una proposición $H = H(P, Q, R, \dots)$ y la tabla de la función booleana $f_H(p, q, r, \dots)$. Inferir que dadas dos fórmulas $H_1 = H_1(P, Q, R, \dots)$ $H_2 = H_2(P, Q, R, \dots)$, entonces: $H_1 \equiv H_2$ si y sólo si $f_{H_1} = f_{H_2}$.

3. Usando el criterio del ejercicio anterior, probar las siguientes equivalencias:

- (a) $(P \rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$
 (b) $(P \nabla Q) \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$
 (c) $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q \equiv T$ (Tautología).
 (d) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \sim Q)) \equiv \sim P$.
 (e) $\sim (P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \sim Q)$.

4. Probar que $\{H_1, \dots, H_n\} \implies C$ si y sólo si $H_1 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C$ es una tautología.

5. Probar que $\{H_1, \dots, H_n\} \implies C$ si y sólo si para cada juego de valores de las variables booleanas p, q, r, \dots , tal que $f_{H_i}(p, q, r, \dots) = 1$ y existe un i tal que $f_{H_i}(p, q, r, \dots) = 0$.

6. Analizar la validez de los razonamientos siguientes:

- a) Si la política se practica honestamente, entonces hay un progreso. Si la política no se practica honestamente, entonces hay opresión. Si hay opresión, entonces la política se practica honestamente y hay progreso. Por consiguiente hay progreso.
- b) Si estudias Filosofía serás pobre. Estudias Filosofía o Abogacía. Si estudias Abogacía no serás feliz. Eres feliz. Por lo tanto no serás pobre.
- c) Si buscas la verdad y te esfuerzas por obrar con virtud, entonces eres un filósofo o un santo. Si eres filósofo, entonces eres un santo. Buscas la verdad pero eres santo. Por lo tanto no te esfuerzas por obrar con virtud.
- d) Si Juan es inteligente y estudia mucho, sacará buenas notas y aprobará el curso. Si Juan estudia mucho pero carece de inteligencia, sus esfuerzos serán apreciados, y si sus esfuerzos son apreciados aprobará el curso. Si Juan es inteligente, entonces estudia mucho. Luego Juan aprobará el curso.

3.3 DISTANCIA DE HAMMING

Dados dos vectores binarios $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n$, $B = \{0, 1\}$, se define la **distancia de Hamming** entre A y B , $\rho(A, B)$ por:

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \quad (\text{aquí se denota suma usual de números enteros}).$$

Y para un vector $A = (a_1, \dots, a_n)$, la **norma** o el **peso** de A , por $\|A\| = \sum_1^n a_i$.

1. Dados los vectores A, B , siguientes, calcular $\|A\|$, $\|B\|$, $\rho(A, B)$, $\|A + B\|$, $\|A \oplus B\|$:

$$A = (0, 0, 1, 1), B = (1, 0, 1, 0);$$

$$A = (0, 0, 0, 1, 1, 1), B = (1, 0, 1, 0, 1, 0);$$

$$A = (0, 1, 0), B = (1, 0, 1).$$

2. Probar que la función $\rho : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ satisface los siguientes axiomas de una **distancia** en \mathbf{B}^n :

- a) $\rho(A, B) \geq 0$ y $\rho(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$ (ρ es no negativa y distingue elementos distintos).
- b) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ para todo $A, B \in \mathbf{B}^n$ (Propiedad Simétrica).
- c) $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$ (Propiedad Triangular).

3. Probar que $\rho(A, B) = \|A \oplus B\| = \|A\| + \|B\| - 2\|A \cdot B\|$, para todo $A, B \in \mathbf{B}^n$.
4. Si $A \in \mathbf{B}^n$ y r es un número real, se define $S(A, r)$, la esfera cerrada con centro A y radio r al conjunto:

$$S(A, r) = \{X \in \mathbf{B}^n : \rho(A, X) \leq r\}.$$

- a) Describir $S(A, r)$ en los siguientes casos:
 $A = (0, 0, 1), r = -1, 1, \pi$;
 $A = (1, 0, 1, 0, 1), r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- b) Probar $S(A, r) = S(A, \lfloor r \rfloor)$ para todo $A \in \mathbf{B}^n$, para todo r real.
- c) Dado $A \in \mathbf{B}^n$, calcular el número de elementos de $S(A, r)$, r arbitrario, $n \geq 1$.
5. 12 estudiantes llevan el registro de su desempeño en Química. Las posibilidades de éxito para cada uno son:
A: Trabajos de laboratorio aprobados,
B: Exámenes escritos aprobados,
C: Exámenes teóricos aprobados,
D: Carpetas completas aprobadas.

Los éxitos o fracasos se representan en la siguiente tabla:

A	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
B	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1

A partir de estos datos responder las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántos estudiantes aprobaron alguna etapa?
b) ¿Cuántos no tuvieron ningún éxito?
c) ¿Cuántos tienen sus carpetas completas?
d) ¿Cuántos aprobaron el examen escrito?
e) ¿Cuántos aprobaron el examen escrito y el teórico?
f) ¿Cuántos aprobaron al menos una de las fases?
g) ¿Cuántos aprobaron exactamente dos etapas?
h) ¿Cuántos estudiantes aprobaron las 4 etapas?

3.4 ANILLOS DE BOOLE

Un anillo \mathbf{B} conmutativo con unidad que tiene la propiedad $b^2 = b$ para todo $b \in \mathbf{B}$, se llama **anillo de Boole**.

1. Probar que (\mathbf{B}^n, XOR, AND) es un anillo de Boole.
2. Probar que en un anillo de Boole \mathbf{B} vale que $b + b = 0$ para todo $b \in \mathbf{B}$.
3. Sean A un conjunto no vacío, $\mathbf{S}(A) = P(A)$ (conjunto de partes de A).
 - a) Probar que $(\mathbf{S}, \Delta, \cap, \emptyset, A)$ con las operaciones Δ (diferencia simétrica) jugando el papel de “suma” con neutro \emptyset , y con \cap jugando el papel de “producto” con neutro A , es un anillo de Boole.

- b) Probar que $(S, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ con las operaciones \cup jugando el papel de “suma” con neutro \emptyset , \cap jugando el papel de “producto” con neutro A , y la complementación respecto A , $\bar{\cdot}$, es un álgebra booleana.
4. Sean \mathbf{S} un conjunto no vacío, provisto de operaciones $+, \cdot, '$, de manera que $(\mathbf{S}, +, \cdot, I, 0, 1)$ un álgebra booleana, con 0 neutro para $+$ y 1 neutro para \cdot , y definiendo \oplus mediante:

$$x \oplus y = xy' + yx',$$

entonces se obtiene que $(S, \oplus, \cdot, 0, 1)$ es un anillo de Boole, con 0 neutro para \oplus y 1 neutro para \cdot .

Recíprocamente, si en \mathbf{S} están dadas las operaciones \oplus, \cdot , de manera que $(\mathbf{S}, \oplus, \cdot, 0, 1)$ es un anillo de Boole, con 0 neutro para \oplus y 1 neutro para \cdot , definiendo $+$ mediante:

$$x + y = x \oplus y \oplus xy,$$

entonces se obtiene que $(\mathbf{S}, +, \cdot, ', 0, 1)$ es un álgebra booleana.

Interpretar estos resultados cuando $\mathbf{S} = P(A)$, el conjunto de partes de un conjunto A .

5. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto finito, con $n \geq 1$, $\mathbf{S} = P(A)$ el conjunto de partes de A , definimos una función $\Psi : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}^n$ tal que para todo $B \in \mathbf{S}$:

$$\Psi(B) = (x_1, \dots, x_n); \quad x_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B \\ 0, & a_i \notin B. \end{cases}$$

Probar los siguientes hechos:

- Ψ es una función biyectiva.
- $\Psi(B \cup C) = \Psi(B) + \Psi(C)$, para todo $B, C \in \mathbf{S}$.
- $\Psi(B \cap C) = \Psi(B) \cdot \Psi(C)$, para todo $B, C \in \mathbf{S}$.
- $\Psi(B^c) = \Psi(B)'$, para todo $B \in \mathbf{S}$.
- $\Psi(B \Delta C) = \Psi(B) \oplus \Psi(C)$, para todo $B, C \in \mathbf{S}$.
- $|\Psi(B)| = |B|$ (cardinal de B) para todo $B \in \mathbf{S}$.
- $|B \Delta C| \leq |B \Delta D| + |D \Delta C|$, para todo $B, C, D \in \mathbf{S}$.
- Comprobar que $d(B, C) = |B \Delta C|$, para todo $B, C \in \mathbf{S}$, es una función distancia en $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$.

4 PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN, FUNCIONES GENERADORAS

4.1 PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

1. Se ha realizado una encuesta sobre medios de transporte urbanos. A cada persona se le preguntó si para concurrir a su trabajo utiliza una de estas tres opciones: colectivo, automóvil o subterráneo permitiéndose más de una respuesta. La información que arroja dicha encuesta es: 30 eligieron colectivo y subterráneo, 15 colectivo y automóvil, 20 subterráneo y automóvil y 5 los tres medios de transporte ¿cuántas personas respondieron esta encuesta?
2. Según una encuestadora, de una muestra de 1000 personas, 234 detestan a los políticos A, B y C; 359 a los políticos A, B y D; 200 a los políticos D y C pero ni al político A ni al político B; 45 a los cuatro políticos; 250 únicamente al político D; y 12 a ninguno de los cuatro. Un alumno aventajado nos explicó que esta encuesta es errónea. ¿Por qué?
3. Hacer un diagrama de Karnaugh, para

$$U = \{1, 2, \dots, 50\},$$

$$A = \{a \in U; a \text{ es par}\}$$

$$B = \{a \in U; a \text{ es múltiplo de } 3\}$$

$$C = \{a \in U; a \text{ es múltiplo de } 5\}$$

$$D = \{a \in U; a \text{ es múltiplo de } 7\}$$

Indicar qué conjunto de casillas representan a $A \cap D$, $C - B$, $A \Delta D$ y $A \Delta B \Delta C \Delta D$.

4. Calcular el número de números naturales n tal que $1 \leq n \leq 1000$, que no son divisibles ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7. ¿Cuántos de ellos son múltiplos de exactamente 3 de estos primos?
5. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las 26 letras del alfabeto (sin ñ) de forma que no aparezcan los patrones *amo*, *odia*, *sexo*?

4.2 FUNCIONES GENERADORAS

1. Probar que una serie formal

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

es inversible si y sólo si $a_0 \neq 0$.

Sugerencia: mostrar que los coeficientes de la inversa pueden calcularse recursivamente.

2. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, probar que:

a)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}, \quad \forall k : n < k < n+m.$$

b)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}, \quad \forall k : n < k < 2n.$$

Sugerencia: Para el inciso (a) desarrollar $(1+x)^{n+m}$ de dos maneras distintas y comparar coeficientes de x^k .

3. Calcular los combinatorios $\binom{1/2}{k}$ y $\binom{-1/2}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, y desarrollar en series de potencias formales $\sqrt{1+x}$ y $1/\sqrt{1+x}$ usando la serie de Newton.

4. Desarrollar en series de potencias formales

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Sugerencia: usar descomposición en fracciones parciales.

5. Dada la sucesión $a_{n+1} - a_n = n$ para $n \geq 0$, $a_0 = 0$, hallar la expresión para a_n , usando el método de las funciones generadoras.

5 COMPARACIÓN DE FUNCIONES

Definición. Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Se define $O(g)$ como el conjunto de todas las funciones $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que son dominadas por g a partir de cierto valor de $x = c_0$ dado, en adelante. Más concretamente:

$$O(g) = \{f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c_0 > 0, C > 0 : \forall x > c_0 : f(x) \leq C g(x)\}.$$

Si $f \in O(g)$, se suele usar la notación $f(x) = O(g(x))$, y se dice que f es un O grande de g .

La idea intuitiva detrás de este concepto es que si $f = O(g)$, los valores de $f(x)$ estará acotados por los valores de $g(x)$, aunque no necesariamente para todos los posibles valores de x , sino a partir del algún valor $x = c_0$.

Una definición análoga existe reemplazando en todos los casos el conjunto $(0, +\infty)$ por el conjunto \mathbb{N} .

Ejemplos:

$$e^x x^{1111} = O(e^{2x}).$$

$$1000x^3 = O(x^3).$$

$$O(1) = \{\text{conjunto de funciones acotadas en algún intervalo } (c_0, \infty)\}.$$

$$n^2 \log n = O(n^3).$$

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, $b > 1$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, para algún $\epsilon > 0$, y sea $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$T(n) = aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces se cumple: $T(n) = O(n^{\log_b a})$.

1. Demostrar que

$$8n^3 - 36n^2 \log^5 n + 17\sqrt{n} - 111n + 2 = O(n^3).$$

2. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio. Demostrar que si $f(n) = O(1)$, entonces el grado de f es 0 (o sea, f es una constante).

3. Sean f polinomio de grado m , g polinomio de grado n , con $m \leq n$. Demostrar que $f(N) = O(g(N))$, $N \rightarrow \infty$.

4. Considere las siguientes funciones crecientes definidas de $(0, \infty)$ en \mathbb{R} :

$$f_m(N) = N^m$$

$$g_m(N) = \log^m(N)$$

$$h_m(N) = \log^m(\log(N))$$

$$u_m(N) = 2^{N/m}$$

$$v_m(N) = 2^{mN}.$$

a) Para $j, k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ cualesquiera, comparar $f_j, g_k, h_\ell, u_m, v_n$, mediante la notación de la O grande. (Por ejemplo: $g_j(N) = O(v_k(N))$).

- b) Demostrar que si f y g son funciones de $(0, \infty)$ en \mathbb{R} , crecientes y que tienden a infinito en el infinito, es decir, tales que $f(N) \rightarrow \infty$ y $g(N) \rightarrow \infty$ cuando $N \rightarrow \infty$, y si \tilde{f}, \tilde{g} son funciones tales que $\tilde{f}(N) = O(f(N))$, $\tilde{g}(N) = O(g(N))$, entonces

$$\tilde{f}(N)\tilde{g}(N) = O(f(N)g(N)).$$

5. Sean f, g , funciones tales que $f(x) = O(g(x))$ y $g(x) = O(f(x))$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Demostrar que existe una constante real $C \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C}f(x) \leq g(x) \leq Cf(x).$$

6. Demostrar que la condición dada en el ejercicio anterior define una relación de equivalencia (que podemos denotar \approx) en el conjunto de todas las funciones $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
7. Discuta si la relación $f \preceq g$, entre funciones f, g , de $(0, \infty)$ en \mathbb{R} , dada por $f(x) = O(g(x))$ (cuando $x \rightarrow \infty$), satisface las propiedades de un orden parcial.
8. Resolver los siguientes incisos, para la función $T(n)$, satisfaciendo la recurrencia indicada:
- $T(n) = 9T(n/3) + n$.
 - $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$.
 - $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$.
 - $T(n) = 8T(n/2) + n^2$.
 - $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$.