Matemática Discreta - Ejercicios

UNCPBA

Cursada 2017

Notación:

- $\mathbb{N}$: Conjunto de números naturales (sin el 0).
- $\mathbb{N}_0$: Conjunto de números naturales (con el 0).
- $\mathbb{Z}$: Conjunto de números enteros.
- $\mathbb{Q}$: Conjunto de números racionales.
- $\mathbb{R}$: Conjunto de números reales.
- $\mathbb{C}$: Conjunto de números complejos.

1 Conjuntos, Funciones, Relaciones

RECOMENDACIÓN GENERAL: En todos los ejercicios que siguen, se recomienda esbozar un gráfico, o un esquema, o un diagrama, para apoyar gráficamente la resolución del problema.

1.1 Conjuntos

1. En cada caso, para el conjunto universal U que se indica, probar que las proposiciones dadas son falsas exhibiendo un contraejemplo, es decir, exhibiendo un valor de $x \in U$ tal que la proposición afectada por el cuantificador $\forall$ es falsa (o equivalentemente, demostrando que la negación es verdadera para todo x de U).

   a) $U = \mathbb{R}$; $\forall z[-|z+1| < 0]$.
   b) $U = \mathbb{N}_0$; $\forall x \forall y[y > 1 - x]$.
   c) $U = \mathbb{R}$; $\forall x \exists y[xy = 1]$.
   d) $U = \mathbb{R}$; $\forall x[(x-3)^2 < x]$.
   e) $U = \mathbb{N}$; $\forall n[n > 2^n \vee n = n/2]$.
   f) $U = \mathbb{N}$; $\forall x \forall y \exists z[\frac{x}{y-x} = 1]$.

   En cada caso discutir si es posible redefinir U (es decir, cambiando el conjunto universal por otro), tal que la correspondiente proposición resulte verdadera.

2. Dado el conjunto
$$C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{N} \cup \{\pi\}, \{a, b, c\}, a, b, d\}$$

   a) Indicar el número de elementos de C y listar todos sus subconjuntos con 0, 1, 2 y 3 elementos.

   b) Esbozar un procedimiento para hacer la lista de todos los subconjuntos.

   c) Si un conjunto A tiene n elementos, ¿cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de subconjuntos (o de partes) de A?

3. Dados conjuntos A, B, C, probar que:

   a) $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
   Esta situación se denota abreviadamente:
   $$A \subset B \subset C.$$

   b) Explicar en detalle la cadena de contenciones:
   $$\{1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$
   atendiendo a la definición de estos conjuntos numéricos.

4. Dados subconjuntos A, B, C, de un conjunto universal U, verificar las Leyes del Álgebra de Conjuntos. Puede usarse el Principio de Dualidad.

5. Se dan los conjuntos:
$$\begin{aligned}
P &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} \\
M &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\} \\
I &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} \\
M_1 &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar y } n < 31\} \\
P_1 &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n = 5k, \text{ algún entero } k\}
\end{aligned}$$

   Describir los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. En cada caso verificar si es posible que el subconjunto está contenido en $\mathbb{N}$.

   a) $P \cap M$

   b) $P \cup M$

   c) $M - M_1$

   d) $P - (P_1 \cap I)$

   e) $I \cup \mathbb{N}$

   f) $(M_1 - P_1) \cap I$

   g) $P \Delta M$

   h) $I \Delta \mathbb{N}$

i) $\mathbb{N} - (\mathbb{R} - I)$

6. Dados conjuntos A, B, C, D, probar que:

   a) $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$.

   b) $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$.

   c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

   d) $A \Delta (B \Delta C) = (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)$
   $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

   e) $A \Delta B \Delta C \Delta D =$

$$\begin{array}{lcll} (\bar{A} \cap B \cap C \cap D) & \cup & (A \cap \bar{B} \cap C \cap D) & \cup \\ (A \cap B \cap \bar{C} \cap D) & \cup & (A \cap B \cap C \cap \bar{D}) & \cup \\ (A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}) & \cup & (\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{D}) & \cup \\ (\bar{A} \cap \bar{B} \cap D \cap \bar{D}) & \cup & (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap D) & \end{array}$$

   f) A partir de d) y e) inferir una ley de formación para escribir $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ en términos de uniones, intersecciones y complementaciones, para todo $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

   g) Dar un argumento que pruebe el siguiente hecho: la diferencia simétrica de n conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, consta de aquellos elementos x que están presentes exactamente en una cantidad impar de dichos conjuntos.

7. Dados conjuntos A, B, C, probar que:

   a) $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$

   b) $(A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C$

   c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

   d) $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$

8. Para las siguientes familias $(A_i)_{i \in I}$ que se indican, calcular $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcap_{i \in I} A_i$.

   a) $I = \{4, 5, 6, 10\}$; $A_i = \{d \in \mathbb{N} : d$ divide a $i\}$.

   b) $I = \mathbb{N}$; $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$.

   c) $I = \mathbb{N}$; $A_i = \{i\} \times \{i\}$.

   d) $I = \mathbb{N}$; $A_i = [i, \infty)$.

   e) $I = \mathbb{N}$; $A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$.

   f) $I = \mathbb{R}$; A_i es el círculo cerrado en el plano $\mathbb{R}^2$ de radio i^2 con centro en $(0, 0)$.

9. Dada una familia indexada de conjuntos $(A_i)_{i \in I}$, con un conjunto de índices I, y dado un conjunto B, siendo todos ellos subconjuntos de un conjunto universal U, probar las leyes distributivas y de De Morgan:

   a) $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

   b) $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

   c) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

   d) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

1.2 Funciones

1. Para cada una de las funciones f que se den a continuación, verificar que, en efecto, están bien definidas como tales, describir los pares de Gr(f) y bosquejar cuando sea posible. En cada caso, calcular Im(f).

   a)
   $$f:\mathbb{R}\to\{0,1\}; f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in\mathbb{Z},\\ 1, & \text{si } x\notin\mathbb{Z}.\end{cases}$$

   b)
   $$f:\mathbb{N}\to\{0,1\}; f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x \text{ es par},\\ 1, & \text{si } x \text{ es impar}.\end{cases}$$

   c)
   $$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}; f(m)=m-1.$$

   d)
   $$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}; f(x)=|x|.$$

   e)
   $$f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}^n; f(x)=\frac{x}{|x|}.$$

   f) Dado un $a\in\mathbb{Z}$ prefijado, analizar los distintos posibles casos:
   $$f:\mathbb{R}-\mathbb{Z}; f(x)=\lfloor ax\rfloor.$$

2. Calcular los valores de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a)
   $$f(x)=\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor; \qquad x\in\mathbb{R}.$$

   b)
   $$f(x)=\lceil 3x\rceil-\lfloor x\rfloor; \qquad x\in\mathbb{R}.$$

   c)
   $$f(x)=\sum_{i=1}^{\lceil x\rceil}\left\lfloor\frac{x}{i}\right\rfloor; \qquad x=\pi, x=e, x=n! \qquad (n=2,3,4).$$

   d)
   $$f(x)=\sum_{i=1}^{\lfloor x\rfloor}\left\lceil\frac{x}{i}\right\rceil; \qquad x=\pi, x=e, x=n! \qquad (n=2,3,4).$$

3. Calcular todos los $x\in\mathbb{R}$ que verifican:

   a) $5\lfloor x\rfloor=\lfloor 3x\rfloor$.

   b) $7\lceil 3x\rceil=\lfloor 7x\rfloor$.

   c) $\lfloor x+7\rfloor=\lfloor x\rfloor+7$.

   d) $3\lceil x\rceil=\lceil 3x\rceil$.

4. a) Sean A un conjunto con n elementos y B un conjunto de m elementos, calcular cuántas funciones inyectivas se pueden definir de A en B, y cuántas biyectivas.

   b) Listar todas las funciones $f : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, y todas las funciones $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ indicando cuáles son inyectivas y cuáles suryectivas.

   c) Para las siguientes permutaciones del conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$, hallar todos los **productos**, las inversas, y las inversos de todos los productos.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Dados dos conjuntos A, B, y una función $f : A \to B$, para cada una de las proposiciones que se dan a continuación, indicar si alguna de ellas equivale a alguna o ninguna de las siguientes propiedades de f o su negación:

   {i} f está bien definida.

   {ii} f es inyectiva.

   {iii} f es suryectiva.

   {iv} f es biyectiva.

   a) $\forall x \in A \big(\exists! y \in B\, [f(x) = y]\big)$.

   b) $\exists x \in A \big(\forall y \in B\, [f(x) \neq y]\big)$.

   c) $\forall x \in A \big(\forall y \in B\, [f(x) = y]\big)$.

   d) $\forall x \in A \big(\exists y \in B\, [f(x) = y]\big)$.

   e) $\forall x \in A \big(\forall y \in A\, [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]\big)$.

   f) $\forall x \in A \big(\exists y \in B\, (\exists z \in B\, [f(x) = z = y])\big)$.

   g) $\forall y \in B \big(\exists! x \in A\, [f(x) = y]\big)$.

   h) $\exists x \in A \big(\exists z \in A\, [x \neq z \wedge f(x) = f(z)]\big)$.

6. Dadas las siguientes funciones

$$
\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}; && f_1(n) = (-1)^n \\
&f_2 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}; && f_2(x) = \frac{1}{x}. \\
&f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; && f_3(z) = \lceil x \rceil. \\
&f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; && f_4(z) = \lfloor x \rfloor. \\
&f_5 : [-1, 1] \to \mathbb{R}; && f_5(z) = |z|. \\
&f_6 : \mathbb{R} - [0, 1) \to \mathbb{R}; && f_6(x) = \frac{1}{|x|}. \\
&f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; && f_7(z) = |\lceil x \rceil|. \\
&f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; && f_8(z) = |\lceil x \rceil|.
\end{aligned}
$$

i) Para cada par i, j, indicar cuándo está definida la composición de funciones $f_i \circ f_j$ (es decir, cuándo se cumple $\mathrm{Im}(f_j) \subset \mathrm{Dom}(f_i)$).

ii) Calcular:

a) $f_1(\{3^m + 5 : m \in \mathbb{N}\})$

b) $f_3([0, 1])$

c) $f_7([-3.5, 12])$

d) $f_1^{-1}(\{1\})$

e) $f_4 \circ f_8(\mathbb{N})$

f) $f_5([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

g) $f_8(-\mathbb{N})$ (aquí $-\mathbb{N}$ representa los enteros negativos).

h) $f_3^{-1}([0, 1])$

i) $f_2(\mathbb{R}_{\geq 0})$

j) $f_6([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

k) $f_3 \circ f_i(\mathbb{N})$

l) $f_8^{-1}(\{-3\})$

7. Probar que cada una de las funciones que siguen son biyectivas y calcular sus inversas:

a) $f : \mathbb{R}_{\geq -1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$;
$f(x) = \sqrt{x + 1}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$f(m) = m^3 - 1$.

c) $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$;
$f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;
$f(x, y) = (3x + 2y, x - y)$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$;
$f(x) = 2^x$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$;
$f(x) = \lceil \lfloor x \rfloor \rceil$.

8. Dados los conjuntos A, B, C, y las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, probar:

a) Si f y g son ambas inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

b) Si f y g son ambas suryectivas, entonces $g \circ f$ es suryectiva.

c) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

d) Si $g \circ f$ es suryectiva, entonces g es suryectiva.

e) Mostrar con un ejemplo que si $g \circ f$ es biyectiva, entonces no necesariamente f es biyectiva o g es biyectiva.

9. Dados dos conjuntos A, B, una función $f : A \to B$, una función $g : B \to C$; si A_1, A_2, son subconjuntos de A; si B_1, B_2, son subconjuntos de B; y C_1 es subconjunto de C; probar que:

a) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

b) Mostrar un contraejemplo en el que la inclusión siguiente sea falsa:
$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.

c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

f) $(g \circ f)^{-1}(C_1) = f^{-1}(g^{-1}(C_1))$.

g) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \cap \mathrm{Im}(f) \subset B_1$.

h) Deducir del ítem anterior que si f es suryectiva, entonces:
$f(f^{-1}(B_1)) = B_1$.

i) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

j) Exhibir un contraejemplo en el que la siguiente inclusión sea falsa:
$f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$.

10. Mostrar una biyección entre:

a) Los enteros positivos y los enteros negativos.

b) Los enteros no negativos y los enteros negativos.

c) Los enteros pares y los enteros impares.

11. Dar ejemplos de funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que:

a) f es inyectiva pero no suryectiva.

b) f es suryectiva pero no inyectiva.

c) f es biyectiva y distinta de $1_{\mathbb{Z}}$.

1.3 Relaciones

1. Dados un conjunto M y una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ definida en M, en cada uno de los casos siguientes averiguar si $\mathcal{R}$ es **reflexiva**, **simétrica**, **antisimétrica**, y/o **transitiva**.

   a) $M = \mathbb{N}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : m + n \text{ es par}\}$.

   b) $M = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : 2 \text{ divide a } m - n\}$.

   c) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x < y\}$.

   d) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x = y\}$.

   e) $M = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$.

   f) $M = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : |x - y| \leq 2\}$.

   g) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : x = \lfloor y \rfloor\}$.

   h) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) : \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$.

   i) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : x \leq y\}$.

   j) $M = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{(m, n) : x - y \in \mathbb{Q}\}$.

2. Dados un conjunto M y una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ en M, definimos **la relación inversa de** $\mathcal{R}$ como:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}.$$

   Para cada una de las relaciones $\mathcal{R}$ definidas en el **Ejercicio 1**, hallar $\mathcal{R}^{-1}$.

3. Dados un conjunto M y una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ en M, demostrar o refutar cada una de las afirmaciones siguientes:

   a) $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$.

   b) $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = M \times M$.

   c) $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

   d) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es reflexiva.

   e) Si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es simétrica.

   f) Si $\mathcal{R}$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es antisimétrica.

4. Dados un conjunto M y dos relaciones $\mathcal{R}_1 \subset M \times M$, $\mathcal{R}_2 \subset M \times M$, en M, probar o refutar cada una de las afirmaciones siguientes:

a) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son reflexivas, entonces:

i) $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ es reflexiva.

ii) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es reflexiva.

b) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son simétricas, entonces:

i) $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ es simétrica.

ii) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es simétrica.

c) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son antisimétricas, entonces:

i) $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ es antisimétrica.

ii) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es antisimétrica.

5. Dados los siguientes conjuntos M y las relaciones $\sim$, probar que:

i) $\sim$ es relación de equivalencia,

ii) para cada $a \in M$: describir $[a]$, la clase de equivalencia de a, y

iii) hallar un conjunto de representantes (es decir describir **el conjunto cociente** $M/\sim$).

a) $M = \mathbb{Z}$; $n \sim m \iff n$ es par.

b) $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff x = y$.

c) $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff |x| = |y|$.

d) $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.

e) $M = \mathbb{R}^2$; $(x, y) \sim (z, t) \iff x = z$.

f) $M = \mathbb{R}$; $x \sim y \iff \exists \lambda \neq 0 \, [y = \lambda x]$.

6. Sea $M = \{@, 0, 1, 2, a, b\}$. Se define en M un ordel total $\leq$ como:

$$@ \leq 0 \leq 1 \leq a \leq b.$$

a) Ordenar las siguientes palabras en el orden lexicográfico, y en el orden lexicográfico inverso (el caracter @ representa el espacio en blanco y no se escribe).

$2a$	$aaaaaa$	10
210	$20a$	$a10b2$
$10a2ba$	$0aaaa$	$2aa1$
$bbba$	21	100

b) Definir en M el orden inverso al dado y realizar la misma tarea que en el inciso a).

7. Sea $M = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y consideremos en ese conjunto al orden lexicográfico.

Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

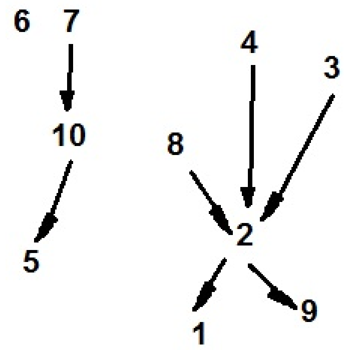
a) $(2, 12) \leq (5, 3)$.

b) $(4, 8) \leq (4, 6)$.

c) $(15, 3) \leq (12, 64)$.

d) $(3, 6) \leq (3, 24)$.

8. Sea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define en M un orden parcial por el diagrama:



i) Hallar los elementos maximales y los elementos minimales de M.
¿Existen máximos o mínimos?

ii) Para cada uno de los subconjuntos de M que se indican, hallar cotas superiores e inferiores y, cuando existan, supremos e ínfimos, indicando cuando son máximos o mínimos.

a) $\{1, 2\}$

b) $\{9\}$

c) $\{2, 5, 7\}$

d) $\{10, 2\}$

e) $\{6, 7\}$

f) $\{5, 7, 10\}$

g) $\{1, 5\}$

h) $\{3\}$

iii) Definir en M un orden que convierta a M en un reticulado, pero que no sea un orden total.

9. Demostrar que un conjunto totalmente ordenado es un reticulado.

10. En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ por:

$$m \prec n : \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que $\prec$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}$.

b) Probar que $(\mathbb{N}, \prec)$ es un reticulado.

Sugerencia: Primero hacer un diagrama de Hasse.

11. Se define la relación $\sim$ en $\mathbb{Z}$ de modo que $n \sim m$ si $n^2 - m^2$ es múltiplo de 2.

a) Probar que $\sim$ es relación de equivalencia.

b) Para cada $m \in \mathbb{Z}$, calcular $[m]$, la clase de equivalencia de m.

12. **Clausura transitiva de una relación.**

    Sean M un conjunto y $(\mathcal{R})_{i\in I}$ una familia de relaciones $\mathcal{R}_i \subset M \times M$, indexada por un conjunto de índices I.

    a) Demostrar que: si para todo $i \in I$ la relación $\mathcal{R}_i$ es transitiva, entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ es transitiva.

    b) Dada una relación $\mathcal{R} \subset M \times M$ en M, probar que existe una relación transitiva $\mathcal{R}'$ en M tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

    c) ¿Es verdad que la familia $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ de todas las relaciones transitivas en M que contienen a $\mathcal{R}$ es no vacía?
    ¿Es verdad que la relación $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ es transitiva y contiene a $\mathcal{R}$?
    Llamemos a $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ la **clausura transitiva de** $\mathcal{R}$.
    Demostrar que si $\mathcal{R}'$ es una relación transitiva tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, entonces $\tilde{R} \subset R'$.
    [Es decir que $\tilde{\mathcal{R}}$ es la menor relación transitiva que contiene a $\mathcal{R}$.]

    d) Hallar la clausura transitiva de las siguientes relaciones:

       i) $M = \{a, b, c, d, e\}$; $\mathcal{R} = \{(a, b), (c, d)\}$.
       ii) $M = \{a, b, c, d, e\}$; $\mathcal{R} = \{(a, d), (e, f\}$.
       iii) $M = \{a, b, c, d, e\}$; $\mathcal{R} = \{(a, d), (d, a), (a, e)\}$.
       iv) $M = \mathbb{N}$; $\mathcal{R} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$.

13. Dados los conjuntos A, B, y la relación $F \subset A \times B$, que se dan abajo en cada caso, determinar cuándo F define una relación funcional. Si no lo define, hallar un subconjunto $A' \subset A$, maximal, tal que $F' = \{(a, b) \in F; a \in A'\}$ defina una relación funcional:

    a) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $F = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
    b) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $F = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
    c) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}$; $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.
    d) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{Z}$; $F = \{(x, \lfloor x \rfloor) : x \in \mathbb{R}\}$.
    e) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{Z}$; $F = \{(m, m^2) : m \in \mathbb{Z}\}$.
    f) $A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}$; $F = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

14. Dados dos conjuntos A, B, y una función $f : A \to B$, se define una relación $\simeq_f$ en A, mediante:

    $a \simeq_f b$ si, y sólo si, $f(a) = f(b)$, para cada $a, b \in A$.

    a) Probar que $\simeq_f$ define una relación de equivalencia en A.

    b) Probar que es posible definir una función $\tilde{f} : A/\simeq_f \to B$, que llamaremos **la función inducida por** f, mediante:
       $\tilde{f}([a]) = f(a)$, para cada clase de equivalencia $[a] \in A/\simeq_f$.
    Nota: Se requiere comprobar que $\tilde{f}$ es, en efecto, una función, lo cual obliga a que se cumpla el requisito de unicidad de la imagen. Tener en cuenta que una clase de equivalencia en general tiene muchos representantes distintos.

2 Números enteros

2.1 Divisibilidad

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, señalar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Sin son verdaderas, demostrarlas, si son falsas dar un contraejemplo.

   Además discutir si siguen siendo verdaderas o falsas al restringirlas a los enteros positivos.

   a) $a|b \Longrightarrow a|(b+c)$ (para todo entero c).

   b) $a|b \Longrightarrow a \leq b$.

   c) $a|bc \Longrightarrow a|b \vee a|c$.

   d) $0|a \Longrightarrow a = 0$.

   e) $a|bc \wedge a \not| c \Longrightarrow a|b$.

   f) $a|(b+c) \wedge a|b \Longrightarrow a|c$.

2. Sean a un entero y $D(a)$ el conjunto de todos los divisores positivos de a:

$$D(a) = \{d \in \mathbb{Z} : d > 0 \wedge d|a\}.$$

   a) Listar los elementos de $D(a)$ para $a = 0, 1, 2, 4, 17, 102, 15^{15}$.

   b) Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$: $D(a) = D(-a)$, y que $|a| \in D(a)$.

   c) Probar que, para todos los $x, a \in \mathbb{Z}$, $x \in D(a) \Longrightarrow D(x) \subset D(a)$.

   En palabras: "si x es divisor positivo de a, entonces todo divisor d de x también es divisor de a".

   d) Sea $a \in \mathbb{N}$. Se define $f : D(a) \to D(a)$ por $f(x) = a/x$, para cada $x \in D(a)$. Probar que f es biyectiva.

   e) Sea $a \in \mathbb{N}$. Probar que hay a lo sumo dos elementos $x \in D(a)$ que verifican $x \geq a/2$.

   f) Calcular $D(a) \cap D(b)$ en los siguientes casos:

   $a = 1, b = 0$.

   $a = 10, b = 5$.

   $a = 20, b = 75$.

   g) Se define en $D(a)$ una relación $\prec$ por:

   $x \prec y \Longleftrightarrow x|y$, todo $x, y \in D(a)$.

   Probar que $\prec$ es una relación de orden parcial en $D(a)$.

   Porbar que $|a|$ es máximo en $D(a)$ para este orden. Dibujar diagramas de Hasse para este orden cuando $a = 1, 2, 4, 10, 12, 16$.

3. Dados $a, m \in \mathbb{N}$, $a \leq m$, hallar la cantidad de múltiplos de a que son positivos y menors que o iguales a m.

4. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall n \in \mathbb{N}$:

   a) $3|n^3 - n + 3$.

   b) $4|5^n - 1$.

   c) $11|9 \cdot 2^n 6^{n+1} + 1$.

   d) $9|(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5)$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, probar que:

   a) $\forall n \in \mathbb{N} : a - b | a^n - b^n$.

   b) $\forall n \in \mathbb{N} : (a + b) | (a^{2n} - b^{2n})$.

   c) $\forall n \in \mathbb{N} : (a + b) | (a^{2n+1} + b^{2n+1})$.

   De estos incisos, deducir los siguientes:

   d) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ par : $10 | (7^n - 3^n)$.

   d) $\forall n \in \mathbb{N} : 4 | 7^n - 3^n$.

   d) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ impar : $10 | (7^n + 3^n)$.

   d) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ impar : $4 | (3^n + 1)$.

6. Demostrar los siguientes enunciados:

   a) Dados n enteros consecutivos, $n \geq 1$, alguno de ellos es divisible por n.

   b) Dado $n \geq 1$, $n!$ divide al producto de n enteros consecutivos cualesquiera.

7. Calcular el cociente y el resto de dividir a por b en los siguientes casos:

   a) $a = 320; b = 7$

   b) $a = n^2 - 1; b = n$ (todo $n \in \mathbb{N}$)

   c) $a = -150; b = -13$

   d) $a = 18; b = -3$

   e) $a = n^2; b = n - 1$ (todo $n \in \mathbb{N}$)

   f) $a = a = -150; b = 13$

8. Si el resto de dividir el entero a por b es r, calcular en cada caso el cociente q al dividir c por b.

   a) $c = 2a, b = 7, r = 5$

   b) $c = 7a + 1, b = 7, r = 5$

   c) $c = 1 - a, b = 2, r = 0$

2.2 Cambio de base

1. Hallar los desarrollos en base 2 (2-ádico, binario), base 8 (8-ádico, octal) y base 16 (16-ádico, hexadecimal) de:

   $4, 8, 15, 16, 42, 256, 2^10$.

   Hallar el desarrollo en base 3 (3-ádico) de: 16, 124710.

2. Hallar el desarrollo en base 5 (5-ádico) de:

   $(4350)_8 + 10x - 1$, donde $x = (1010)_{12}$.

3. Hallar la base s tal que: $(237)_s = 196$.

4. Hallar la base s tal que: $(173)_s$ es un cuadrado perfecto.

2.3 Máximo Común Divisor y números primos

El máximo común divisor de dos números enteros a y b se denota $(a : b)$ (o bien mcd(a, b)).

1. En los siguientes incisos, hallar $(a : b)$ y expresarlo como combinación entera de a y b:

   a) $(24 : 331)$

   b) $(31 : 101)$

   c) $(111 : 73)$

   d) $(-13 : 17)$

2. Hallar soluciones de las siguientes ecuaciones diofánticas lineales:

   a) $10x + 5y = 23$

   b) $51x + 219y = 36$

   c) $2^n x + (2^n + 1)y = 3^n$ (todo $n \in \mathbb{N}$)

3. Resolver los siguientes problemas:

   a) Al número 1630 se lo escfibe como suma de dos números enteros, uno de ellos es múltiplo de 101 y el otro da 70, ¿cuál es la expresión general de esos números?

   b) Los productos A y B cuestan \$150 y \$135 la tonelada. ¿Qué cantidades enteras de ambos pueden comprarse con \$6000?

4. Probar que, dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 1$, entonces:

   a) $a|bc \Longrightarrow a|c$

   b) $a|c$ y $b|c \Longrightarrow ab|c$.

   c) Ahora suponer que $(a : b) \neq 1$ y dar contraejemplos de los enunciados de los incisos anteriores.

5. Hallar todos los números primos (positivos) p tales que $p \leq 200$.

   Determinar cuáles de los siguientes números son primos: 101, 103, $2^{64} - 1$.

6. Si se sabe que p y $p + 1$ son primos, ¿qué número es p?

7. Probar que $n^4 + 4$ no es primo si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, p, q primos. Probar:

   a) $p|a^2 \Longrightarrow p|a$.

   b) $p^2|a^2 \Longrightarrow p|a$.

   c) $p \neq q$, $p|a$, $q|a \Longrightarrow pq|a$.

   d) $b^2|a^2 \Longrightarrow b|a$.

   e) $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b = 1$.

   f) $pa^2 = qb^2 \Longrightarrow p = q$.

9. Caracterizar los pares de números enteros a, b, tales que verifiquen $a^2 = b^2$.

10. Probar que los siguientes números reales no son racionales:

    a) $a + b\xi$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $\xi \notin \mathbb{Q}$.

    b) $\sqrt[n]{p}$, p primo, $n \in \mathbb{N}$.

    c) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

    d) $\log_4 18$.

11. Probar que:

    a) $(a : a + p) = 1$, para todo $a \in \mathbb{N}$ y para todo p primo.

    b) $(n^2 : (n + 1)^2) = 1$, todo $n \in \mathbb{N}$.

    c) $(a : b) = 1 \Longrightarrow (8a + 3b : 3a + b) = 1$.

12. Probar que los valores posibles de $(n^2 - 1 : 3n + 1)$ (con valores de $n \in \mathbb{N}$ cualesquiera) son 1, 2, 4, 8.

    Hallar para cada uno de estos valores un $n \in \mathbb{N}$ que lo verifique.

13. Sea p uno de los primos 2, 3, 5, 7. Hallar la máxima potencia de p que divide a $100!$.

14. Hallar la máxima potencia de 6 que divide a $100!$.

    ¿En cuántos ceros termina $2017!$?

2.4 Congruencias

1. Resolver las siguientes ecuaciones de congruencia, dando todas las soluciones no congruentes según el módulo indicado, y todas las soluciones enteras.

   a) $132x \equiv -21 \bmod 18$.

   b) $100x \equiv 15 \bmod 35$.

   c) $-1050x \equiv 15 \bmod 351$.

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones de congruencias.

   a)
   $$\begin{cases} x \equiv 2 & \bmod 3 \\ x \equiv 3 & \bmod 5 \end{cases}$$

   b)
   $$\begin{cases} 3x \equiv 0 & \bmod 15 \\ 5x \equiv 13 & \bmod 11 \end{cases}$$

   c)
   $$\begin{cases} 2x \equiv 1 & \bmod 5 \\ 5x \equiv 13 & \bmod 6 \\ x \equiv 11 & \bmod 17 \end{cases}$$

3. Dado un entero positivo a con desarrollo decimal $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, probar los siguientes criterios de divisibilidad:

   a) **Divisibilidad por 3:**
   $$a \equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \bmod 3.$$

b) **Divisibilidad por 5:**

$$a \equiv 0 \bmod 5 \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod 5.$$

c) **Divisibilidad por 9:**

$$a \equiv 0 \bmod 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \bmod 9.$$

d) **Divisibilidad por 11:**

$$a \equiv 0 \bmod 11 \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n \equiv 0 \bmod 11.$$

4. Sea p un primo. Probar que
$$ab \equiv 0 \bmod p \Leftrightarrow a \equiv 0 \bmod p \vee b \equiv 0 \bmod p.$$

5. Sea p primo. Probar que
$$(a+b)^{p^n} \equiv a^{p^n} + b^{p^n} \bmod p,$$
para todo $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

6. Calcular el resto de la división de n por m según se indica en cada caso:

   a) $n = 3^{1037}$; $m = 61$.

   b) $n = 47^{7385}$; $m = 17$.

   c) $n = 3 \cdot 9^{94} - 2 \cdot 42^{23}$; $m = 11$.

   d) $n = \sum_{k=0}^{81} 2 \cdot 3^k$; $m = 7$.

7. Sea $m \in \mathbb{N}$. Dada la relación $\equiv$, de congruencia módulo m, se designa con $\mathbb{Z}_m$ al conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ y
$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}.$$
Probar que $\mathbb{Z}_m$ es un anillo conmutativa con neutro $[0]_m$ e identidad $[1]_m$ con las operaciones de suma y producto entre clases de congruencia siguientes:
$$[a]_m + [b]_m = [a+b]_m$$
$$[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m.$$

8. Se denota con U_m a las unidades de $\mathbb{Z}_m$ (es decir, aquellos elementos que tienen inverso multiplicativo).

   Probar que $[1]_m \in U_m$ y que U_m es cerrado bajo el producto (es decir, que el producto de dos elementos de U_m es también un elemento de U_m).

   Probar además que $[a]_m \in U_m$ implica $[a]_m^{-1} \in U_m$.

   Hacer la tabla para el producto en U_m para $m = 2, 3, 5, 6, 10, 17$.

9. Si $m = 2, 3, 5, 7, 11$, averiguar qué elementos de $\mathbb{Z}_m$ tienen raíces cuadradas o cúbicas.

10. Dado un primo p, factorizar el polinomio $x^p - x$ en $\mathbb{Z}_p[x]$.