Orden Parcial

Ejercicio 8

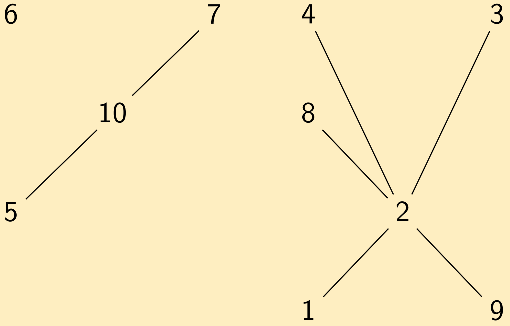
Sea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define en M un orden parcial por el diagrama:

Orden Parcial

Ejercicio 8

Sea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define en M un orden parcial por el diagrama:

Orden Parcial



Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Es diferente decir que $\forall x \in M$ con el orden dado

Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Es diferente decir que $\forall x \in M$ con el orden dado

- No hay elementos mayores que x,

Orden Parcial

Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Es diferente decir que $\forall x \in M$ con el orden dado

- No hay elementos mayores que x, Maximales

  $(\forall x \in M)\,[x \leq a \Leftrightarrow x = a]$

Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Es diferente decir que $\forall x \in M$ con el orden dado

- No hay elementos mayores que x, Maximales

  $(\forall x \in M)\,[x \leq a \Leftrightarrow x = a]$

- x es el mayor de todos los elementos de M,

Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Es diferente decir que $\forall x \in M$ con el orden dado

- No hay elementos mayores que x, Maximales

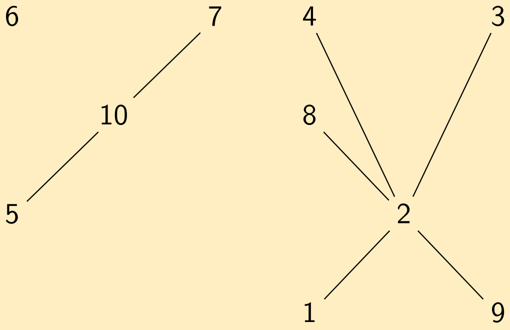
  $(\forall x \in M)\,[x \leq a \Leftrightarrow x = a]$

- x es el mayor de todos los elementos de M, Máximos

  $(\forall a \in M)\,[a \leq x]$

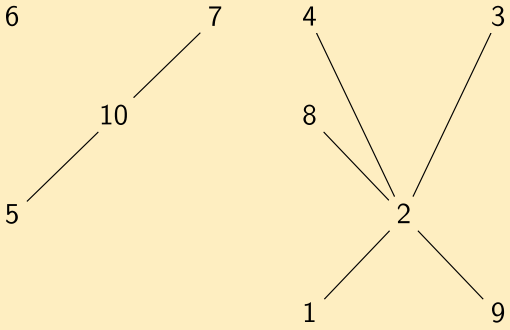
Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Orden Parcial



Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Orden Parcial

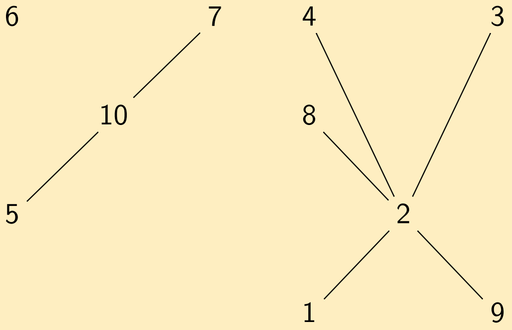


Maximales - Máximos

Maximales:
$\{3, 4, 6, 7, 8\}$

Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Orden Parcial



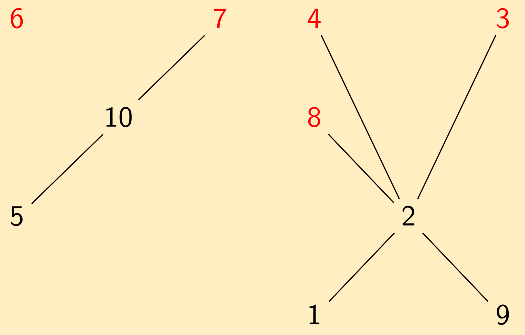
Maximales - Máximos

Maximales:
$\{3, 4, 6, 7, 8\}$

Máximos: No existen

Ejercicio 8 -i) Hallar elementos maximales, minimales de M.¿Existen máximos o mínimos?

Orden Parcial



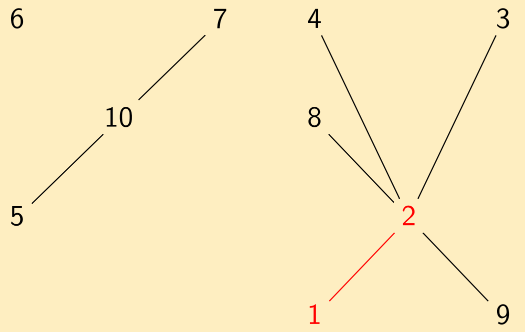
Maximales - Máximos

Maximales: $\{3, 4, 6, 7, 8\}$

Máximos: No existen

Ejercicio 8 -ii) Para cada uno de los subconjuntos de M que se indican, hallar cotas superiores e inferiores, y, cuando existan, supremos e ínfimos, indicando cuando son máximos o mínimos

Orden Parcial



Ejercicio 8- i) -a)

$\{1,2\} \subset M$

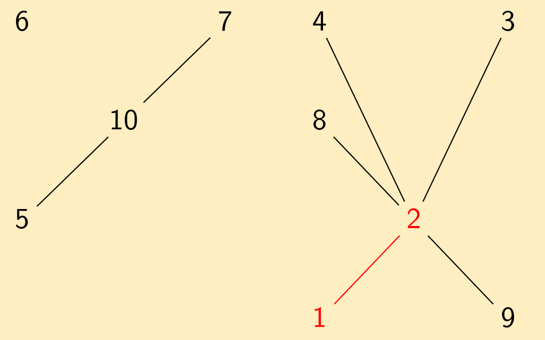
Cotas superiores de $\{1,2\} = \{2,3,4,8\}$

Supremo de $\{1,2\} = 2$

Máximo de $\{1,2\} = 2$

Ejercicio 8 -ii) Para cada uno de los subconjuntos de M que se indican, hallar cotas superiores e inferiores, y, cuando existan, supremos e ínfimos, indicando cuando son máximos o mínimos

Orden Parcial



Ejercicio 8- i) -a)

$\{1,2\} \subset M$

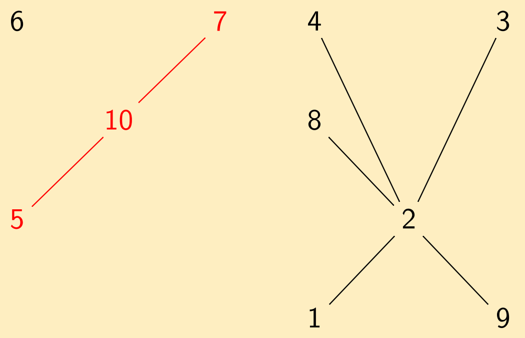
Cotas Inferiores de $\{1,2\} = \{1\}$

Ínfimo de $\{1,2\} = 1$

Mínimo de $\{1,2\} = 1$

Ejercicio 8 -ii) Para cada uno de los subconjuntos de M que se indican, hallar cotas superiores e inferiores, y, cuando existan, supremos e ínfimos, indicando cuando son máximos o mínimos

Orden Parcial



Ejercicio 8- i) -f)

$\{5,7,10\} \subset M$

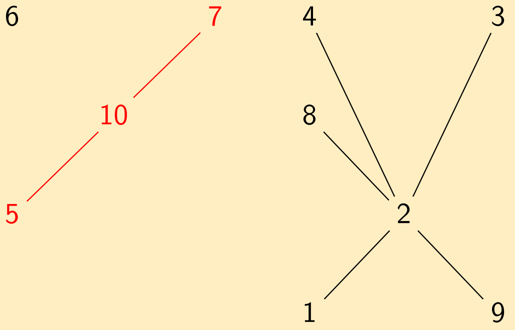
Cotas superiores de $\{5,7,10\} = \{7\}$

Supremo de $\{5,7,10\} = 7$

Máximo de $\{5,7,10\} = 7$

Ejercicio 8 -ii) Para cada uno de los subconjuntos de M que se indican, hallar cotas superiores e inferiores, y, cuando existan, supremos e ínfimos, indicando cuando son máximos o mínimos

Orden Parcial



Ejercicio 8- i) -a)

$\{5, 7, 10\} \subset M$

Cotas Inferiores de $\{5, 7, 10\} = \{5\}$

Ínfimo de $\{5, 7, 10\} = 5$

Mínimo de $\{5, 7, 10\} = 5$

Ejercicio - 9) Demostrar que un conjunto totalmente ordenado es un reticulado

Oden Total

Un conjunto $\mathbb{K}$ está totalmente ordenado si
$(\forall a, b \in \mathbb{K})\,[a \leq b \vee b \leq a]$

Reticulado

Un conjunto $\mathbb{L}_{\leq}$ se llama reticulado si
$(\forall a, b \in \mathbb{L})\,[\{a, b\}$ tiene un único supremo y un único ínfimo$]$

Ejercicio - 9) Demostrar que un conjunto totalmente ordenado es un reticulado

$\mathbb{L}$ es totalmente ordenado $\Longrightarrow$ $\mathbb{L}$ es reticulado

Sean $a, b \in \mathbb{L}_{\leq} \implies \{a, b\} \subset \mathbb{L} \wedge (a \leq b \vee b \leq a)$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{porH/} \begin{cases} Sup\,\{a,b\} & = & b & si & a \leq b \\ Sup\,\{a,b\} & = & a & si & b \leq a \\ Inf\,\{a,b\} & = & b & si & b \leq a \\ Inf\,\{a,b\} & = & a & si & a \leq b \end{cases}$$

Luego, existe el supremo y el ínfimo de $\{a, b\}$ y $\mathbb{L}_{\leq}$ es reticulado

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que $\prec$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}$

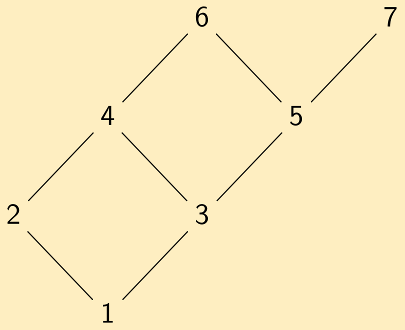
b) Probar que $(\mathbb{N}, \prec)$ es un reticulado.

Sugerencia: Primero hacer un diagrama de Hasse

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

Sugerencia:Primero hacer un diagrama de Hasse



Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Reflexiva: $(\forall n \in \mathbb{N})\,[n \leq n, n$ tiene la misma paridad que $n]$

Luego $n \prec n$ y la relación de orden es reflexiva

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Antisimétrica: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec m}_{H} \Leftrightarrow m = n$

1. m y n son de la misma paridad
2. m y n no son de la misma paridad

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

<u>Antisimétrica</u>: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec m}_{H} \Leftrightarrow m = n$

1. m y n son de la misma paridad

   y $m \leq n$ y $n \leq m$ por definición del orden dado

   entonces $m = n$ y se cumple antisimetría

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Antisimétrica: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec m}_{H} \Leftrightarrow m = n$

2 m y n no son de la misma paridad

$\Longrightarrow$ m es impar $\wedge n$ es par $\vee m$ es par $\wedge n$ es impar

luego la hipótesis es falsa y se cumple antisimetría

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Antisimétrica: $m \prec n \wedge n \prec m \Leftrightarrow m = n$

1. m y n son de la misma paridad

   y $m \leq n$ y $n \leq m$

   entonces $m = n$ y se cumple antisimetría

2. m y n no son de la misma paridad

   $\Longrightarrow$ (m es impar $\wedge$ n es par) $\vee$ (m es par $\wedge$ n es impar)

   luego la hipótesis es falsa y se cumple antisimetría

por 1 y 2 la relación es antisimétrica

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Transitiva: $m \prec n \wedge n \prec t \Leftrightarrow m \prec t$

En todos los casos $m \leq n$ y $n \leq t$

1. m, n y t son de la misma paridad, los tres pares o los tres impares
2. m y n son pares y t es impar
3. m y n son impares, t es par
4. m y n no son de la misma paridad

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

<u>Transitiva</u>: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec t}_{H} \Leftrightarrow m \prec t$

En todos los casos $m \leq n$ y $n \leq t$

1. m, n y t son de la misma paridad, los tres pares o los tres impares

   m, n, t son de la misma paridad y $m \leq n \leq t$

   $\implies m, t$ tienen la misma paridad y $m \leq t \implies m \prec t$

   luego, se cumple la transitividad

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Transitiva: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec t}_{H} \Leftrightarrow m \prec t$

En todos los casos $m \leq n$ y $n \leq t$

2 m y n son de la misma paridad, ambos pares, t es impar

$\Longrightarrow$ n, t no tienen la misma paridad y n es par $\Longrightarrow$ $n \not\prec t$

luego la hipótesis es falsa y se cumple la transitividad

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

<u>Transitiva</u>: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec t}_{H} \Leftrightarrow m \prec t$

En todos los casos $m \leq n$ y $n \leq t$

3 m y n son de la misma paridad, ambos impares, t es par

$\implies m$ es impar y $m \leq t \implies m \prec t$

luego, se cumple la transitividad

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Transitiva: $\underbrace{m \prec n \wedge n \prec t}_{H} \Leftrightarrow m \prec t m \leq n \text{ y } n \leq t$

4 m y n no son de la misma paridad

Si m es par y n es impar entonces no se cumple $m \prec n$ y la hipótesis es falsa, cumple la transitividad

Si m es impar y n es par pero t es impar entonces no se cumple $n \prec t$ y la hipótesis es falsa, cumple la transitividad

Si m es impar y n es par pero t es par entonces $m \prec n$, $n \prec t$ como m es impar entonces $m \prec t$ cumple la transitividad

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

En todos los casos hemos probado la transitividad

1. m, n y t son de la misma paridad, los tres pares o los tres impares
2. m y n son de la misma paridad, ambos pares, t es impar
3. m y n son de la misma paridad, ambos impares, t es par
4. m y n no son de la misma paridad

por 1, 2, 3 y 4 la relación es transitiva

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

a) Probar que es una relación de orden parcial

Hemos probado que la relación es

REFLEXIVA

ANTISIMÉTRICA y

TRANSITIVA

Entonces $\prec$ es relación de orden parcial

Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

Reticulado

Un conjunto $\mathbb{L}_{\leq}$ se llama reticulado si

$(\forall a, b \in \mathbb{L}) \left[\{a, b\} \text{ tiene un único supremo y un único ínfimo} \right]$

b) Probar que $(\mathbb{N}_{\prec})$ es un reticulado

1 m y n tienen la misma paridad y $m \leq n \implies$

sup $\{m, n\} = n$ y ínf $\{m, n\} = m$ se cumple la definición de reticulado

2 m y n no tienen la misma paridad y $m \leq n \implies$

2.1 m es impar $\implies$ sup $\{m, n\} = n$ y ínf $\{m, n\} = m$ se cumple la definición de reticulado

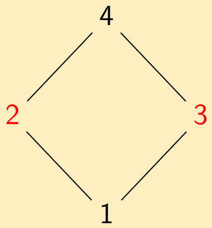
Ejercicio - 10) En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, se define una relación $\prec$ dada por

$$m \prec n \begin{cases} m \text{ y } n \text{ son de la misma paridad y } m \leq n \\ m \text{ es impar y } m \leq n \end{cases}$$

b) Probar que $(\mathbb{N}_{\prec})$ es un reticulado

2.2 m y n no tienen la misma paridad, con m par y $m \leq n$

Ejemplo

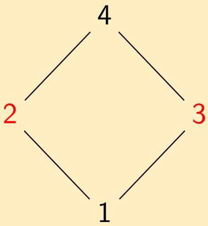


Ejercicio - 10)

b) Probar que $(\mathbb{N}_{\prec})$ es un reticulado

2.2 m y n no tienen la misma paridad, con m par y $m \leq n$

Ejemplo



Cotas superiores de $\{2, 3\} = \{4, 6, 8, \cdots\} \implies \sup\{2, 3\} = 4$

Cotas inferiores de $\{2, 3\} = \{1\} \implies \inf\{2, 3\} = 1$

b) Probar que $(\mathbb{N}_{\prec})$ es un reticulado

2.2 m y n no tienen la misma paridad, con m par y $m \leq n$

En general

Por definición de orden dado

Cotas superiores de $\{m, n\} = \{t \in \mathbb{N} : t \geq n \wedge t \text{ es par}\}$

Cotas superiores de

$\{m, n\} = \{n+1, n+3, n+5, \cdots\} \implies \sup\{m, n\} = n+1$

Cotas inferiores de $\{m, n\} = \{t \in \mathbb{N} : t \leq m \wedge t \text{ es impar }\}$

Cotas inferiores de

$\{m, n\} = \{m-1, m-3, m-5, \cdots\} \implies \sup\{m, n\} = m-1$

Ejercicio - 11) Se define la relación $\sim$ en $\mathbb{Z}$ de modo que $n \sim m$ si $n^2 - m^2$ es múltiplo de 2

a) Probar que $\sim$ es relación de equivalencia

1 Reflexiva: $(\forall n \in \mathbb{Z}) \left[n^2 - n^2 = 0 \right] \implies n \sim n$ se cumple la reflexividad

2 Simétrica: $n \sim m \Leftrightarrow n^2 - m^2$ es par

$n^2 - m^2 = k$ con k entero par $\implies -k$es par, con $-k = m^2 - n^2 \implies m \sim n$ se cumple la simetría

3 Transitiva: Si $n \sim m \wedge m \sim t \Leftrightarrow n^2 - m^2$ es par $\wedge$ $m^2 - t^2$ es par

$\implies n^2 - m^2 + m^2 - t^2 = n^2 - t^2$ es par $\implies n \sim t$ se cumple la transitividad

Por 1, 2, 3 la relación $\sim$ es de equivalencia

Ejercicio - 11) Se define la relación $\sim$ en $\mathbb{Z}$ de modo que $n \sim m$ si $n^2 - m^2$ es múltiplo de 2

b) Para cada $m \in \mathbb{Z}$ calcular $[m]$, la clase de equivalencia de m

$[m] = \{n \in \mathbb{Z} : m \sim n\}$

Un conjunto en el que se ha definido una relación de equivalencia puede ser dividido en varios subconjuntos disjuntos de elementos equivalentes entre sí y tales que la reunión de esos subconjuntos coincide completamente con el conjunto

Si $m \sim n$ si y solo si $m^2 - n^2$ es par $\implies$ m, n tienen la misma paridad

Si m es par y $m^2 - n^2$ es par, entonces n es par

Si m es par $[m] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$

Si m es impar y $m^2 - n^2$ es par, entonces n es impar

Si m es impar $[m] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\}$

Ejercicio - 11) Se define la relación $\sim$ en $\mathbb{Z}$ de modo que $n \sim m$ si $n^2 - m^2$ es múltiplo de 2

b) Para cada $m \in \mathbb{Z}$ calcular $[m]$, la clase de equivalencia de m

$[m] = \{n \in \mathbb{Z} : m \sim n\}$

Tenemos entonces $\mathbb{Z}$ dividido en dos subconjuntos disjuntos llamados clases de equivalencia

$P = \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ es par}\} = [0]$

$M = \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ es impar}\} = [1]$

donde 0 y 1 son representantes de cada clase

Conjunto Cociente: $Z/_{\sim} = \{[0], [1]\}$

Ejercicio - 12) Clausura Transitiva de una relación

Sean $\mathbb{M}$ un conjunto y $(R)_{i\in I}$ una familia de relaciones $R_i \subset \mathbb{M}\times\mathbb{M}$, indexada por un conjunto de índices I

a) Demostrar que si para todo $i \in I$ la relación R_i es transitiva, entonces $\bigcap_{i\in I} R_i$ es transitiva

Debemos probar que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es transitiva

$(a,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i$ y $(b,c) \bigcap_{i\in I} R_i$

$\implies (\forall i \in I)\,(a,b)\,,(b,c)\,R_i$

$\underbrace{\implies}_{\text{por H/}} (\forall i \in I)\,(a,c) \in R_i$

$\implies (a,c) \in \bigcap_{i\in I} R_i$

Luego $\bigcap_{i\in I} R_i$ es transitiva

b) Dada una relación $R \subset M \times M$ en M, probar que existe una relación transitiva R' en M tal que $R \subset R'$

Transitiva: $\underbrace{(a,b) \in R' \wedge (b,c) \in R'}$ $\Longrightarrow$ $(a,c) \in R'$

R es transitiva si

1 $\underbrace{(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R}_{H} \Longrightarrow (a,c) \in R$

2 $\underbrace{(a,b) \in R \wedge (b,c) \notin R}_{H}$

Si R es transitiva $\Longrightarrow R = R' \Longrightarrow R \subset R'$

Ejercicio - 12) Clausura Transitiva de una relación

b) Dada una relación $R \subset M \times M$ en M, probar que existe una relación transitiva R' en M tal que $R \subset R'$

Transitiva: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

R no es transitiva si

$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ pero $(a, c) \notin R$

Construimos $R' = R \cup T$ donde T es un subconjunto de $M \times M$ tal que

$(\forall ((a, b) \wedge (b, c)) \in R) \implies (a, c) \in T$

luego $R \cup T$ es transitiva y $R \subset R \cup T = R'$

d) Hallar la Clausura Transitiva de las siguientes relaciones:

iii) $M = \{a, b, c, d, e\}\,; R = \{(a, d)\,, (d, a)\,, (a, e)\}$

$R' = \{(a, d)\,, (d, a)\,, (a, e)\,, (a, a)\,, (d, d)\,, (d, e)\}$

Ejercicio - 13) Dados los conjuntos A, B, y la relación $F \subset A \times B$ que se da en cada caso, determinar cuando F define una relación funcional. Si no la define hallar un subconjunto $A' \subset A$, maximal, tal que $F' = \{(a, b) \in F : a \in A'\}$ defina una relación funcional

b) $A = \mathbb{R}; B = \mathbb{R}_{\geq 0}; F = \left\{\left(x, x^2\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$

F es relación funcional ya que $\left(\forall x \in \mathbb{R}, \exists x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\right)$ y que si $(a, b) \in F$ y $(a, c) \in F$ entonces $b = a^2 \wedge c = a^2 \implies b = c$