# Ensayo del Preparcial 1 - Matemática Discreta - 04/set/2017

## (no suma puntos para la nota de cursada)

Apellido: ______________________________
Nombres: ______________________________
DNI: ______________________________
Cantidad hojas entregadas: ______________________________
Nota obtenida: ______________________________

(Ejercicio 1.) **[puntaje total: 17]**

(a) Dados conjuntos $A, B, C, D$, en un cierto universo, usando propiedades algebraicas de conjuntos conocidas, demostrar la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\overline{(A \times B) \cup \overline{C \times D}} = [(\bar{A} \cap C) \times (B \cap D)] \cup [(A \cap C) \times (\bar{B} \cap D)] \cup [(\bar{A} \cap C) \times (\bar{B} \cap D)].$$

(b) Se pide demostrar la siguiente igualdad de conjuntos, mediante el procedimiento de tomar un elemento $x$ que pertenece al conjunto de la izquierda, y deducir que $x$ pertenece al conjunto de la derecha, y viceversa.

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} [2^{-j}, 2^j] = [\tfrac{1}{2}, 2].$$

(Ejercicio 2.) **[puntaje total: 17]**

(a) Dada la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 + \frac{2}{3} \left\lfloor x + \pi \right\rfloor,$$

esbozar un gráfico, y explicar el razonamiento utilizado para dicho esbozo. Además, calcular $f^{-1}(0)$.

(b) Dadas las siguientes funciones, establecer cuándo está bien definida la composición $f_k \circ f_j$, en los casos en que $j < k$.

$$f_1 : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3, \qquad f_1(x) = \frac{x}{|x|}.$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad f_2(x) = |x|.$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to [0, 1], \qquad f_3(x) = |\cos(3x)|.$$

$$f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad f_4(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

# Propuesta de solución.

En lo que sigue se muestra una posible solución a los ejercicios:

(Ejercicio 1.) (a)

(1) $\overline{(A\times B)\cup\overline{C\times D}} = \overline{A\times B}\cap\overline{\overline{C\times D}}$ (Propiedad de De Morgan)

(2) $= \overline{A\times B}\cap(C\times D)$ (Propiedad involutiva del complemento)

(3) $= \Big((\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})\Big)\cap(C\times D)$(complemento del producto cartesiano)

(4) $= \Big((\bar{A}\times B)\cap(C\times D)\Big)\cup\Big((A\times\bar{B})\cap(C\times D)\Big)\cup\Big((\bar{A}\times\bar{B})\cap(C\times D)\Big)$(distributiva)

(5) $= [(\bar{A}\cap C)\times(B\cap D)]\cup[(A\cap C)\times(\bar{B}\cap D)]\cup[(\bar{A}\cap C)\times(\bar{B}\cap D)].$

En el último paso usamos que el producto cartesiano y las intersecciones se pueden intercambiar (ver ejercicios de la práctica).

(b) Primero que nada, conviene observar el comportamiento de la familia de intervalos $\{[2^{-j},2^j]\}_{j\in\mathbb{N}}$. Al dibujarlos en la recta, observamos que el más chico de ellos corresponde a $j=1$, y que a medida que $j$ va creciendo, también crecen los intervalos, incluyendo a los anteriores, es decir:

$$[2^{-1},2^1]\subset[2^{-2},2^2]\subset[2^{-3},2^3]\subset\cdots.$$

Esto nos permite hacernos una idea de por qué es cierta la igualdad del enunciado, ya que vemos que el primero de los intervalos, el $[2^{-1},2^1]$ está contenido en todos los demás, así que todos los puntos $x$ de ese intervalo han de estar en la intersección de todos los intervalos.

Sea $x\in\bigcap_{j\in\mathbb{N}}[2^{-j},2^j]$.
Por definición de intersección generalizada, podemos afirmar que:
Para todo $j\in\mathbb{N}$ vale que $x\in[2^{-j},2^j]$. En símbolos:

$$\forall j\in\mathbb{N}:(x\in[2^{-j},2^j]).$$

En particular, esto es cierto de paso para cada valor particular del índice $j$ que tomemos.
En particular, notamos que es cierto para el valor de índice $j=1$. Así que se deduce que:
$x\in[2^{-1},2^1]=[\frac{1}{2},2]$.

Hemos demostrado la inclusión:

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}}[2^{-j},2^j]\subset[\tfrac{1}{2},2].$$

Ahora probemos lo contrario.

Sea $x\in[\frac{1}{2},2]$. Esto equivale a decir que: $\frac{1}{2}\le x\le 2$.

Sea $j\in\mathbb{N}$ cualquiera. Observamos que $2^{-j}\le 2^{-1}=\frac{1}{2}$ y que $2=2^1\le 2^j$.

Por lo tanto: $2^{-j}\le\frac{1}{2}\le x\le 2\le 2^j$.

Entonces, $x\in[2^{-j},2^j]$.

Pero como esto lo hemos probado para todo $j\in\mathbb{N}$, escribimos:

$\forall j\in\mathbb{N}: x\in[2^{-j},2^j]$.

Por definición de intersección generalizada, concluimos:

$$x\in\bigcap_{j\in\mathbb{N}}[2^{-j},2^j].$$

Entonces, hemos probado que:

$$[\tfrac{1}{2},2]\subset\bigcap_{j\in\mathbb{N}}[2^{-j},2^j].$$

La doble inclusión equivale a la igualdad:

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}}[2^{-j},2^j]=[\tfrac{1}{2},2].$$

(Ejercicio 2.) (a) En este inciso no voy a mostrar el dibujo, pero voy a hacer una aclaración:

Dada cualquier función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si defino otra función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ así:

$$f(x)=\alpha+\beta h(x-\gamma),$$

donde $\alpha,\beta,\gamma$, son ciertos números reales, el gráfico de la función $f(x)$ es similar al de $h(x)$, con la única salvedad de que hay que aplicar un factor de expansión vertical $\beta$ (si $\beta$ es negativo, hay además una inversión vertical), y trasladar toda la gráfica resultante de manera que el centro del dibujo se mueva del punto $(0,0)$ del plano hacia el punto $(\gamma,\alpha)$. Dicho en otras palabras, hay un corrimiento horizontal igual a $\gamma$ y un corrimiento vertical igual a $\alpha$.

En cuanto al ejercicio que hay que resolver, hay que reconocer que en realidad lo que tenemos es un corrimiento y aplastamiento de la función piso. Es decir, si tomamos $h(x)=\lfloor x\rfloor$, y luego efectuamos una expansión vertical con factor $\frac{2}{3}$, seguidas de un corrimiento horizontal de longitud $-\pi$ y un corrimiento vertical de longitud 1, nos queda la función $f(x)=1+\frac{2}{3}\lfloor x+\pi\rfloor$ que tenemos en el enunciado.

Entonces ahora es fácil graficar la función pedida.

Para calcular $f^{-1}(0)$, debemos observar cuáles son los valores de $x$ tal que $f(x) = 0$. Escribimos:

$$\begin{aligned} 0 = f(x) = 1 + \frac{2}{3}\lfloor x + \pi \rfloor \qquad &\Rightarrow \\ -1 = \frac{2}{3}\lfloor x + \pi \rfloor \qquad &\Rightarrow \\ -\frac{3}{2} = \lfloor x + \pi \rfloor. \end{aligned}$$

Como la función piso sólo puede dar valores enteros, no hay ningún valor de $x$ que satisfaga la última ecuación. Por lo tanto, podemos concluir que: $f^{-1}(0) = \emptyset$.

(b) Los casos en que $j < k$ son en total 6.

La condición que debe cumplirse para que esté bien definida la composición $f_k \circ f_j$ es que el conjunto imagen de $f_j$ sea subconjunto de $f_k$.

A veces hay que calcular explícitamente el conjunto imagen.

Pero no siempre es necesario, porque si el codominio de $f_j$ cabe completamente en el dominio de $f_k$, ya está, y no hay que preocuparse de conocer con exactitud cuál es el conjunto imagen e $f_j$.

Tenemos que codominio$(f_1) = \mathbb{R}^3 =$ dominio$(f_2)$. Así que $f_2 \circ f_1$ está bien definida.

En cambio, el codominio de $f_1$ tiene sólo puntos de $\mathbb{R}^3$, ninguno de los cuales es un punto de $\mathbb{R}$, que es el dominio de $f_3$. Así que en este caso la composición no es posible.

Tampoco es posible la composición $f_4 \circ f_1$.

Tenemos que codominio$(f_2) = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R} =$ dominio$(f_3)$. Así que $f_3 \circ f_2$ está bien definida.

También tenemos que codominio$(f_2) = \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty) =$ dominio$(f_4)$. Así que $f_4 \circ f_2$ está bien definida.

Finalmente, tenemos que codominio$(f_3) = [0, 1] \subset [0, \infty) =$ dominio$(f_4)$. Así que $f_4 \circ f_3$ está bien definida.

Aunque en el ejercicio sólo se pide los casos $j < k$ para hacer corto el tiempo de resolución, se aconseja estudiar los otros casos posibles con $k < j$, y también con $j = k$.